ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 29, n. 1, 2021

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2021

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica

e la sua didattica

Anno 29, n. 1, 2021

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2021

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

Scientificità riconosciuta ANVUR

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Comitato di redazione
Direttore: Maura Iori (Italia)
Gianfranco Arrigo (Svizzera)
Miglena Asenova (Italia)
Benedetto Di Paola (Italia)
Iliada Elia (Cipro)
Olga Lucia Léon (Colombia)
Pedro Javier Rojas (Colombia)
Sergio Vastarella (Italia)

Comitato scientifico:
Direttore: Bruno D'Amore (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia)
Samuele Antonini (Università di Pavia, Italia)
Luis Carlos Arboleda (Universidad del Valle, Cali, Colombia)
Luis Moreno Armella (Cinvestav, Ciudad de México, México)
Ferdinando Arzarello (Università di Torino, Italia)
Giorgio Bolondi (Università di Bolzano, Italia)
Guy Brousseau (Université de Bordeaux, Francia)
Ricardo Cantoral (Cinvestav, Ciudad de México, México)
Ubiratan D'Ambrosio (UNICAMP/Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, Brasile)
Raymond Duval (Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale, Francia)
Martha Isabel Fandiño Pinilla (NRD, Università di Bologna, Italia)
Vicenç Font (Universitat de Barcellona, Spagna)
Athanasios Gagatsis (University of Cyprus, Nicosia, Cipro)
Juan D. Godino (Universidad de Granada, Spagna)
Pedro Gómez (Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia)
Colette Laborde (Université de Grenoble, Francia)
Salvador Llinares (Universidad de Alicante, Spagna)
Maria Alessandra Mariotti (Università di Siena, Italia)
Luis Radford (Université Laurentienne, Canada)
Luis Rico (Universidad de Granada, Spagna)
Bernard Sarrazy (Université de Bordeaux, Francia)
Silvia Sbaragli (Dipartimento Formazione e Apprendimento – SUPSI, Locarno, Svizzera)
Carlos Eduardo Vasco Uribe (Universidad Nacional de Colombia, Emeritus, Bogotá, Colombia)
Gérard Vergnaud (Centre National de la Recherche Scientifique, CNRS, Parigi, Francia)
Fernando Zalamea (Universidad Nacional, Bogotá, Colombia)

Indice

Le difficoltà di comprensione e di gestione dei termini specialistici della geometria all'ingresso della scuola secondaria di primo grado

Difficulties in understanding and managing specialized geometry terms at middle school entrance

Silvia Sbaragli, Elena Franchini e Silvia Demartini
Dipartimento formazione e apprendimento - SUPSI, Locarno, Svizzera

Sunto. *In questo articolo viene proposto ciò che è emerso dall'analisi dei risultati di tre quesiti rientranti nel pre-test delle prove standardizzate di matematica di quinta primaria del Canton Ticino (Svizzera). Il pre-test è stato somministrato a ottobre 2019 a un campione significativo di circa 440 allievi all'ingresso della prima secondaria di primo grado e i quesiti qui esaminati riguardano la conoscenza di termini specialistici. Dai risultati emerge una difficoltà diffusa a comprendere e a gestire termini specialistici rientranti nell'ambito geometrico. L'intento dell'articolo è dunque di ricordare che il lessico rappresenta una realtà ricca e complessa, su cui è importante investire tempo e attenzione in didattica.*

Parole chiave: linguaggio della matematica, lessico specialistico, prove standardizzate di matematica.

Abstract. *In this paper, we will describe the results of the analysis of three items included in the pre-test of the standardized math primary fifth grade tests of Canton Ticino (Switzerland). This pre-test was administered in October 2019 to a significant sample of about 440 students at sixth grade entry, and the items here examined concern the knowledge of specialized vocabulary. The results show a widespread difficulty in understanding and managing the geometry specialized terms. This article aims to remember that the lexicon represents a rich and complex linguistic level, on which it is important to invest time and attention in mathematics education.*

Keywords: language of mathematics, specialized vocabulary, standardized math tests.

Resumen. *En este trabajo proponemos lo que surgió del análisis de los resultados de tres preguntas incluidas en la prueba previa de las pruebas estandarizadas de matemáticas de la quinta primaria en el Cantón del Tesino (Suiza). La prueba previa se administró en octubre de 2019 a una muestra significativa de unos 440 alumnos al entrar en la primera escuela secundaria y las preguntas que se examinan aquí se refieren al conocimiento de términos especializados. Los resultados muestran una dificultad generalizada para comprender y manejar los términos especializados del ámbito geométrico. El objetivo del artículo es, por tanto, recordar que el léxico representa una realidad rica y compleja, en la que es importante invertir tiempo y* *atención en la enseñanza.*

Palabras claves: lenguaje de la matemática, léxico especializado, pruebas estandarizadas de matemática.

1. Introduzione

Il contributo si colloca nell'ambito della ricerca finanziata dal Fondo Nazionale Svizzero per la Ricerca Scientifica *Italmatica. Comprendere la matematica a scuola, fra lingua comune e linguaggio specialistico* (progetto 176339), condotta da un gruppo interdisciplinare di esperti in didattica della matematica e di linguisti incentrata sull'indagine degli aspetti linguistici coinvolti nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Il progetto consiste principalmente nell'individuazione, nella raccolta e nell'analisi, dal punto di vista linguistico e matematico, di un corpus di libri di testo scolastici, al fine di delinearne le caratteristiche compositive e di individuare gli elementi che potrebbero rappresentare ostacoli per la comprensione da parte degli alunni (Demartini, Sbaragli, & Ferrari, 2020; Canducci, Demartini, & Sbaragli, in stampa).

Parallelamente a questo progetto, sono stati costruiti e proposti alcuni quesiti volti a indagare specifici aspetti linguistici legati alla comunicazione e all'argomentazione nell'ambito della matematica, alle definizioni, e alla comprensione e all'uso di parole specialistiche nel contesto geometrico. Questi quesiti fanno parte di una batteria più ampia di quesiti preparati nell'ambito della valutazione standardizzata di matematica di quinta primaria che saranno somministrati a maggio del 2021 in Canton Ticino (data posticipata a causa della pandemia COVID-19), e che sono stati pretestati nell'ottobre del 2019 su un campione statisticamente significativo di allievi all'inizio della prima secondaria di primo grado.[1] Alcuni dei quesiti pretestati sono stati liberati dai vincoli di riservatezza delle prove standardizzate e rientrano nell'analisi oggetto di questo articolo.

In particolare, vengono qui presentate le difficoltà riscontrate dagli studenti nel rispondere a quesiti che sondano le competenze relative al lessico specialistico della geometria.

2. Il linguaggio della matematica e le possibili difficoltà di comprensione

2.1. Le peculiarità del linguaggio della matematica e la sua importanza

---

[1] Precisiamo che in Canton Ticino vigono le denominazioni "scuola elementare" e "scuola media" per gli ordini scolastici "primaria" e "secondaria di primo grado", ma per i fini della rivista abbiamo scelto di lasciare la denominazione italiana nel corso dell'articolo (comunque chiarissima anche per un lettore svizzero).

nel percorso di apprendimento

È di crescente interesse lo studio del ruolo della lingua nell'apprendimento della matematica: sono infatti sempre di più i contributi scientifici rivolti a studiare il linguaggio utilizzato in ambito matematico e a indagare come gli allievi di tutti i livelli scolastici si approccino a esso. In particolare, numerosi studi in didattica della matematica hanno evidenziato come tra le cause delle difficoltà di apprendimento disciplinare vi siano proprio l'acquisizione, la comprensione e la gestione del suo linguaggio (Laborde, 1995; Maier, 1995; D'Amore, 2000; Ferrari, 2004; 2021; D'Aprile, Squillace, Armentano, Cozza, D'Alessandro, Lazzaro, Rossi, Scarnati, Scarpino, Servi, & Sicilia, 2004). Passando agli studi di linguistica, oltre ai lavori d'impianto teorico-descrittivo (come Cortelazzo, 1994; Gualdo & Telve, 2011), sul versante della linguistica educativa emerge con sempre maggiore chiarezza l'importanza della lingua come tramite disciplinare e come strumento per la comprensione profonda (ad esempio Lavinio, 2004; Colombo & Pallotti, 2014). Per dirla con De Mauro (2014), e prestando particolare attenzione alla dimensione lessicale, si può sostenere che

> fare crescere le capacità di comprensione e di uso attivo della lingua è un compito che deve coinvolgere insegnanti d'ogni disciplina, dalla letteratura alle scienze, perché la crescita delle capacità linguistiche, che è ovviamente fondamentale per la maturazione espressiva individuale e per la vita di relazione, si correla strettamente anche alla crescita della comprensione di ciò che viene offerto e richiesto da lezioni e testi di ogni materia. Più ricco e duttile è il vocabolario che l'allievo possiede, meglio si addentra nella conoscenza di campi nuovi e diversi dei saperi e delle tecniche; e più e meglio si addentra in questi campi più il suo vocabolario si arricchisce e più si articola e affina il significato di parole già possedute. (De Mauro, 2014, p. 19)

Studi teorici come quelli sopra citati hanno contribuito a inquadrare con più precisione il discorso matematico nell'ampio campo delle "lingue delle scienze". Tra i vari "discorsi scientifici" con cui condivide alcuni tratti caratteristici, infatti, la matematica ha sviluppato nel tempo un proprio linguaggio con specificità pressoché uniche, in cui convivono diversi codici semiologici: aritmetico, algebrico con espressioni simboliche e notazioni (formule, equazioni, espressioni algebriche ecc.), figure e grafici, che spesso sono inserite in frasi che, per il resto, appartengono alla lingua comune.

Oltre agli aspetti lessicali, alcuni dei quali saranno al centro di questo contributo, al linguaggio matematico vengono di solito attribuite le seguenti caratteristiche: universalità, precisione e concisione, che possono risultare complesse, distanti e vincolanti quando si parla di apprendimento. La precisione e la concisione sono infatti caratteristiche che contrastano nettamente con ogni precedente abitudine linguistica degli allievi e che rendono l'informazione veicolata particolarmente "densa" o "condensata", perché in porzioni testuali brevi o brevissime si forniscono numerose informazioni (Laborde, 1995; D'Amore, 2000). Come sottolineano Gualdo e Telve (2011, p. 244), tale "densità non è data (…) solo dai tecnicismi specifici, ma anche dalla costruzione di sintagmi particolarmente complessi", di cui la matematica è ricca. Pertanto, nonostante spesso le frasi non siano troppo lunghe, si è di fronte a testi tutt'altro che semplici.

Questa abitudine alla densità tende a essere un tratto che si mantiene anche nella manualistica e nella prassi didattica. Eppure, non va dimenticato che l'utilizzo di forme linguistiche "contratte" e sintetiche presuppone una conoscenza profonda dei concetti sottostanti un dato termine o delle informazioni rimaste implicite, e una certa dimestichezza con simili formulazioni, che richiedono un alto costo cognitivo per essere comprese e interiorizzate; fatto non di certo scontato quando si ha a che fare con allievi la cui padronanza del codice linguistico in generale, spesso, non è ancora piena. La costruzione di un linguaggio specialistico deve fare i conti con questa realtà di fondo, per essere graduale ed efficace.

Anche le nominalizzazioni, molto frequenti nei linguaggi scientifici in generale, contribuiscono ad accrescere la densità sintattica e informativa (Gualdo & Telve, 2011, p. 118). Il fenomeno designa l'uso preferenziale di nomi e aggettivi in luogo di verbi per esprimere processi. Ne derivano frequenti trasformazioni di frasi predicative in forme nominali: ad esempio, in ambito geometrico, il "sovrapporre due figure punto per punto" viene sostituito con il termine "congruenza di figure". Halliday (2004) chiama "impacchettamento" del testo il fenomeno che nasce da frequenti nominalizzazioni, e "spacchettamento" il processo richiesto di conseguenza per la comprensione. L'operazione di decodifica e interpretazione necessaria per la comprensione di un testo con diverse nominalizzazioni richiede all'allievo uno sforzo non banale, che può facilmente portare alla mancanza di comprensione del contenuto matematico, talvolta dissimulata attraverso un'acquisizione solo superficiale di forme linguistiche imparate a memoria, senza controllo semantico.

L'uso di nominalizzazioni e la conseguente riduzione dei verbi, spesso, tra l'altro, in forma impersonale o passiva, realizzano quel carattere di universalità cui vorrebbe tendere il discorso matematico, portando a deagentivizzare e ad atemporalizzare il discorso stesso. Un discorso con simili caratteristiche è decisamente lontano dalle prassi comunicative abituali dei giovani allievi, che fanno per lo più un uso della lingua personalizzato, ricco di verbi, di punti di riferimento sia nello spazio sia nel tempo altamente contestuali e situazionali, e così via. Tali forme d'uso della lingua, che spesso prevedono il ricorso a parole e a concetti già noti, sono le più naturali per gli allievi e per loro rappresentano anche il modo più semplice per parlare degli oggetti matematici, ma portano inevitabilmente a una mancanza di precisione o a formulazioni errate dal punto di vista della disciplina (Laborde, 1995). Come si può vedere in Demartini, Fornara e Sbaragli (2018, pp. 98), sul piano lessicale, può accadere che "i significati legati al linguaggio comune e quelli specifici del linguaggio matematico si mischino tra loro, creando, in certi casi, incoerenze e possibili misconcezioni". Didatticamente risulta quindi necessario trovare un compromesso tra la correttezza disciplinare e una comunicazione consapevole e ragionata della matematica, che presti attenzione anche agli aspetti linguistici fin dai primi anni di scolarizzazione, proprio perché sono imprescindibili per un apprendimento solido ed efficace.

2.2. La componente linguistica nel percorso di insegnamento e apprendimento della matematica: il rischio del "matematichese"

È rilevante sottolineare un altro aspetto che accomuna un po' tutti i linguaggi specialistici e che può rappresentare un ostacolo alla comprensione: l'utilizzo di una sintassi peculiare, con strutture a volte artificiose, che tende a "elevare" il discorso scientifico in un contesto − quello dell'aula − in cui al contrario sarebbe necessario renderlo più vicino agli allievi. Il fenomeno risulta molto marcato in matematica: il discorso matematico prevede costrutti linguistici speciali tradizionalmente presenti nei libri di testo, che vengono però utilizzati dai docenti anche in situazioni e in livelli scolastici per i quali rischiano di rivelarsi inadeguati e poco efficaci per la comprensione. Accade, insomma, che la lingua della matematica, con le peculiarità tipiche del discorso disciplinare primario, in contesto scolastico assuma addirittura la forma di una particolare varietà linguistica che D'Amore (1993; 2000), sulla scia dei già esistenti *scolastichese*, *burocratese*, *politichese*, ha chiamato "matematichese". Si pensi a costrutti del tipo "dicesi", "si bisecano scambievolmente a metà", "passanti per" ecc., che appesantiscono la trattazione e inducono l'allievo a crearsi un modello fittizio di linguaggio specialistico, da ripetere acriticamente nelle proprie verbalizzazioni perdendo di vista il più delle volte il senso della comunicazione. La lingua smette, così, di essere uno strumento per capire.

A questo proposito sono evidenti le difficoltà di articolare verbalmente la propria conoscenza matematica senza cadere in ripetizioni mnemoniche, soprattutto nell'arco della scuola dell'obbligo. Questo si amplifica nella scuola secondaria di primo grado dove gli allievi non hanno ancora acquisito la padronanza della lingua comune in tutte le sue possibilità, dunque possiedono una ancora ristretta competenza linguistica di base, eppure si trovano confrontati con le prime richieste di formalizzazione del linguaggio matematico (Ferrari, 2004). Sono inoltre già stati esposti per anni alla versione scolastica del discorso specialistico matematico, con le sue abitudini radicate, i suoi stilemi tipici e le prassi manualistiche.

Va pure osservato, sempre sulla scia di Ferrari (2003), che anche qualora la competenza linguistica (specialistica e non solo) fosse accertata, è frequente l'incapacità di saperla utilizzare in contesti specifici scientifici, persino nelle fasce di età più adulte: "numerosi studenti che possiedono, sulla carta, un discreto bagaglio di competenze linguistiche, non le usano che in minima parte nella loro attività scientifica e in particolare, nella risoluzione dei problemi di matematica" (Ferrari, 2003, p. 470). Andando sempre più nello specifico, quanto le carenze in ambito linguistico possano incidere profondamente sulla risoluzione di problemi è stato testimoniato anche dai risultati delle prove standardizzate somministrate in Canton Ticino a tutti gli allievi di quinta primaria (Sbaragli & Franchini, 2017; Franchini, Lemmo, & Sbaragli, 2017), che hanno messo in evidenza come le difficoltà di comprensione di un testo di un problema pregiudichino la sua risoluzione e di come tali carenze siano diffuse e radicate (su questo si veda anche l'esperienza di Fornara e Sbaragli, 2017). In questo contributo ci focalizzeremo prettamente sugli aspetti lessicali, in particolar modo quelli legati al vocabolario matematico.

2.3. Il lessico della matematica e le sue insidie

2.3.1. Le distinzioni dal punto di vista della linguistica

Nelle lingue delle scienze e, più in generale, nei linguaggi specialistici, la componente lessicale è il livello linguistico in cui è forse più evidente la specializzazione dei sottocodici. In contesto scolastico, scrive Sobrero (2009),

> l'approccio alle materie scientifiche (…) fa accedere a una semantica (…) meno vaga di quella già posseduta, ma più ricca di concetti astratti, di lessici speciali formati, da una parte, da riusi specialistici di parole dell'uso comune, dall'altra, da termini che – diversamente da quelli dell'uso comune – sono tendenzialmente monosemici e non ambigui (…). (Sobrero, 2009, p. 220)

Nella matematica, la *terminologia* (ovvero l'insieme delle parole specialistiche) è caratterizzata da due principali tipi di lemmi:[2]

a) *termini* come *cateto*, *ipotenusa* o *coseno*, dal significato univoco e monosemico, che al di fuori del contesto matematico non hanno altre possibilità espressive né ulteriori accezioni;
b) *parole-termini* come *angolo*, *punto* o *figura*, cioè parole che nel discorso specialistico hanno un significato tecnico specifico, mentre nella lingua comune sono portatrici di sensi ulteriori (su queste si veda l'indagine svolta dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di primo grado riportata in Demartini, Fornara e Sbaragli, 2018; sulle differenze fra parole e termini si veda, per esempio, Lavinio, 2004, pp. 98–101).

Si tratta in entrambi i casi di *tecnicismi*, ma, se quelli di tipo a) sono esclusivi per chi non ne conosce il significato, così non è per quelli di tipo b), che hanno anche uno o più sensi nella lingua comune, probabilmente noti al parlante. Dal punto di vista didattico occorre considerare che l'applicazione di pratiche interpretative tipiche del linguaggio quotidiano al contesto della matematica può costituire un ostacolo laddove risultino inefficaci e addirittura contrastanti.

---

[2] Le distinzioni qui riportate valgono non solo per la matematica ma grosso modo per tutte le scienze, con alcune specificità.

Come rileva Maier (1993),

> gli allievi (…) cercano di dare nuovi sensi a dei termini che, nella loro mente, possiedono di già il carattere di idee stabili dal loro uso nella comunicazione quotidiana. Il senso "vecchio", che l'allievo ben conosce, disturba la comprensione del nuovo senso, e se l'allievo riesce a integrare quest'ultimo, per molto tempo si pone il problema della distinzione tra il senso matematico e gli altri sensi. (Maier, 1993, p. 74)

Per i termini specialistici del tutto nuovi, legati in modo specifico alla disciplina e raramente utilizzati fuori dal contesto scolastico, il discorso è diverso: sono sì difficili da memorizzare e da usare correttamente, ma il loro significato univoco e specializzato solitamente non crea interferenze con altri contesti d'uso.

Gli studi sui linguaggi specialistici distinguono anche *tecnicismi specifici* (o *primari*), di cui si è parlato finora, dai *tecnicismi collaterali* (o *secondari*). Se i primi sono in genere insostituibili (non è possibile chiamare in nessun altro modo esatto il *cateto*, il *poligono* o la *diagonale*, ad esempio, a meno che non esistano sinonimi o quasi-sinonimi accettabili in ambito disciplinare), i secondi sono parole che caratterizzano lo stile comunicativo dei linguaggi specialistici in luogo di altre espressioni più semplici e comuni: ne sono esempi *assumere* un farmaco, *accusare* un dolore o, nei testi scolastici, il verbo *bisecare* (riferito alle "diagonali"), in luogo del più immediato *dividere a metà*. L'approccio didattico al lessico disciplinare non può trascurare la complessità qui delineata, da inserire nel quadro dell'alfabetizzazione lessicale (Ferreri, 2005).

2.3.2. *Le distinzioni dal punto di vista della matematica e della sua didattica*

Per quanto concerne l'ambito matematico, ci sono diverse categorizzazioni circolanti in letteratura, che specificano in vario modo le distinzioni presentate nel paragrafo precedente. Una significativa ai fini del nostro discorso è quella proposta da Monroe e Panchyshyn (1995), citata da diversi autori (Harmon, Hedrick, & Wood, 2005; Pierce & Fontaine, 2009; Powell & Driver, 2015), che hanno ricondotto le parole del vocabolario della matematica a uno dei seguenti tipi:

- *tecnico*, che comprende i termini specifici della matematica, ossia tutte quelle parole che hanno un solo significato interno alla disciplina (per esempio *parallelogramma*);
- *sub-tecnico*, che descrive quei "termini-parole" dotati di più di un significato a seconda del contesto in cui sono inserite, uno dei quali è specifico della matematica (per esempio *poligono*);
- *generale*, che include parole ed espressioni della lingua comune che non rientrano esclusivamente nel linguaggio settoriale della matematica, ma

che gli studenti incontrano anche quando trattano la matematica (per esempio *semplificare*);

- *simbolico*, che comprende i numerosi simboli non alfabetici che sono usati in matematica (per esempio i numerali, i simboli "+", "=" ecc.) e che devono essere riconosciuti correttamente e gestiti in modo appropriato nei diversi contesti matematici in cui si incontrano (si pensi al segno di uguaglianza che ha accezioni differenti a seconda dell'ambito in cui è utilizzato).

Di natura in parte diversa è l'analisi di Rubenstein e Thompson (2002, p. 108), che hanno evidenziato, lavorando sulla lingua inglese, non solo la natura delle parole della matematica, ma anche le ragioni alla base delle difficoltà che possono presentarsi nell'apprendimento di esse. Adattiamo e riprendiamo qui, ricollegandole al nostro discorso, le cause di difficoltà più pertinenti anche a una riflessione sull'italiano, integrando qualche prospettiva didattica.

- I significati delle "parole-termini", polisemiche, dipendono dal contesto (ad esempio *poligono* in geometria e *poligono* come area attrezzata per le esercitazioni di tiro) e i significati matematici di esse sono più precisi e circoscritti dei significati della lingua comune (ad esempio, *prodotto* come il risultato di una moltiplicazione rispetto al *prodotto* di un'azienda). Per allenare gli allievi a gestire questi conflitti di significato, è didatticamente utile tener conto del bagaglio di concezioni e di sensi che convivono nel loro magazzino lessicale: quando si affrontano concetti matematici, va incentivata, almeno nelle prime fasi dell'apprendimento, l'esplicitazione di analogie e differenze tra parole considerate nei vari ambiti d'uso, tramite un lavoro congiunto di italiano e matematica. Infatti, come mostrato in Demartini, Fornara e Sbaragli (2018), i significati collegati a contesti diversi convivono nella mente degli studenti dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di primo grado, e sarebbe interessante estendere la ricerca anche a ordini superiori di scolarità. Proprio al procedere della scolarità, per lavorare sulla polisemia può anche essere utile una riflessione più esplicita sulla storia delle parole e sui processi che hanno portato alla coesistenza di più significati: in questo senso risulta affascinante approfondire fenomeni come le *risemantizzazioni* o *rideterminazioni semantiche* (Gualdo & Telve, 2011, pp. 81–91), che, spesso attraverso meccanismi analogici e metaforici, hanno ampliato i referenti attribuibili a una parola [un esempio immediato in questo senso è *corrente*, calco settecentesco sul francese *courant* (corrente di un corso d'acqua) e frutto della similitudine fra flusso di corrente e flusso d'acqua]; un paragone analogo tra le proprietà è accaduto per la "parola-termine" *base* in geometria (Martini & Sbaragli, 2005).
- I significati dei "termini" e delle locuzioni specifiche sono univoci e presenti solo nel contesto matematico (ad esempio *parallelogramma*

oppure *ortocentro*). La situazione è opposta alla precedente, perché questi tecnicismi non generano conflitti semantici, ma presentano potenziali difficoltà del tutto diverse. In particolare, alla loro monosemia e univocità consegue un indubbio rigore, e vanno pertanto appresi come "etichette" precise per i concetti in gioco. Più semplici del caso precedente o più difficili? Dipende, senz'altro diversi, meno vicini al parlante, che non li usa al di fuori del contesto disciplinare e che quindi non si confonderà fra le varie accezioni; ma proprio per questo molto specifici e incontrati solo di rado, cosa che non aiuta l'acquisizione completa e la memorizzazione. Proprio considerando la circolazione ristretta e il carattere denotativo uno a uno di tali tecnicismi, un docente della disciplina deve essere consapevole che la gestione di essi non è immediata né semplice, e può richiedere molta pratica: per quanto non ci sia, qui, l'ingombro dato da altri significati, i termini vanno esercitati per memorizzarne la forma e il significato preciso (in forma orale, ma anche ad esempio tramite *cloze* mirati sul tipo di Zini, 2014, magari fatti elaborare dagli stessi allievi).

- L'esistenza di tecnicismi che hanno significati multipli, le "parole-termini" del paragrafo precedente (ad esempio il *lato di un triangolo* e il *lato di un angolo*, *il vertice in un poligono* e *il vertice in un poliedro*) e l'esistenza di tecnicismi condivisi dalla matematica e da altre discipline, in cui hanno un significato almeno in parte diverso (come *variabile* in matematica e *variabile* in meteorologia): al crescere della scolarità sarà interessante osservare (raccogliere, approfondire a livello etimologico e così via) come esista una pluralità di significati tutti tecnici, ma propri di diversi domini del sapere.
- La presenza di più parole specialistiche in uno stesso ambito semantico che designano referenti diversi, ma aventi numerosi tratti comuni; a volte i termini sono più specifici, mentre altre volte più generici (ad esempio *circonferenza* e *contorno*, *poligono* e *figura*): può essere utile far esercitare gli allievi nell'uso attivo di queste parole soprattutto in contesti comunicativi dove è necessario farsi capire attraverso frequenti formulazioni e riformulazioni orali e scritte, giochi linguistici e indovinelli, revisioni di testi con imprecisioni linguistico-concettuali, ma anche *cloze*, non solo da fare ma anche da progettare. La sola esposizione a esse, infatti, può non essere sufficiente all'acquisizione di una solida competenza distintiva, mentre l'abitudine all'uso, anche attraverso modalità varie, ne agevola l'acquisizione.
- La frequenza d'uso di sinonimi o di quasi-sinonimi, cioè di parole o sintagmi diversi per esprimere lo stesso concetto (ad esempio, *15 minuti* e *un quarto d'ora;* in matematica *un mezzo* o *la metà,* in certi casi *superficie* ed *estensione*): ciò può accadere sia nei testi scolastici sia nei problemi e riguarda non tanto i tecnicismi in senso stretto (per cui la sinonimia non è

solitamente prevista), ma altre parole che concorrono a strutturare il contenuto. Per incentivare in bambini e ragazzi una maggiore attenzione ai sinonimi (al fine di cogliere le coreferenze di significato) e alla gestione dei quasi-sinonimi (ad esempio *casa* ed *edificio*, in matematica per la scuola primaria *contorno* e *bordo*) è utile un lavoro interdisciplinare che porti attenzione specifica sul lessico, prevedendo la possibilità di interrogarsi sulle parole e sui loro significati in contesto.

- Possono venire usati termini informali anziché termini specialistici da parte di allievi e docenti (ad esempio *aquilone* per dire *deltoide*, *palla* per dire *sfera*, facendo riferimento per analogia a un oggetto del reale), in particolare negli ordini inferiori di scolarità. Per passare da denominazioni spontanee (interessanti, ma ovviamente lontane dal linguaggio disciplinare), è didatticamente utile sensibilizzare bambini e ragazzi ai diversi contesti comunicativi e gradatamente far acquisire denominazioni sempre più specifiche.

È a questo punto sempre più evidente quante possibili difficoltà un allievo deve fronteggiare nell'apprendimento del linguaggio della matematica e delle discipline in generale. Il suo lessico dovrebbe gradatamente arricchirsi di termini e di significati dalle caratteristiche diverse da quelle del vocabolario prima conosciuto, e svilupparsi parallelamente a esso, nella prospettiva di un'educazione linguistica globale; arricchimento necessario e fondamentale, seppur non privo di insidie, come emerge anche dall'analisi delle risposte degli allievi di prima secondaria di primo grado ai quesiti analizzati nei paragrafi successivi. È infatti impegnativa la competenza richiesta agli allievi, anche perché per riuscire a comprendere e a gestire consapevolmente nuovi oggetti matematici, è necessario attivare operazioni e processi mentali sia sul piano concettuale sia su quello linguistico.

Non va infatti sottovalutato che la capacità di usare parole corrette per spiegare, comunicare e argomentare in matematica è importante per lo sviluppo complessivo della competenza matematica. D'altronde è ormai noto che la competenza dipende da una continua crescita e fusione di svariate conoscenze, abilità e processi cognitivi, tra cui il saper comunicare. Inoltre, come abbiamo già messo in evidenza, diverse ricerche mostrano che la lingua è una componente fondamentale del successo in matematica. In particolare, alcune ricerche dimostrano che se lo sviluppo del linguaggio degli allievi è debole o instabile, il loro apprendimento generale in matematica viene rallentato (Van der Walt, Maree, & Ellis, 2008); inoltre come viene messo in evidenza da Van der Walt (2009) la conoscenza del vocabolario specifico di un allievo risulta un indice attendibile di buone prestazioni matematiche.

In accordo con l'ipotesi di Sfard (2000) che considera il linguaggio non come veicolo di significati preesistenti, ma come costruttore dei significati stessi, allora "possiamo ipotizzare che una padronanza linguistica sintatticamente debole e lessicalmente imprecisa non aiuti la costruzione di un sapere specifico solido e approfondito" (Demartini & Sbaragli, 2019, p. 20), ipotesi condivisa dagli studi in campo linguistico educativo (Lavinio, 2004; Colombo & Pallotti, 2014).

3. Somministrazione e quesiti oggetto di analisi

Come già accennato, i quesiti oggetto di analisi sono stati somministrati nell'ottobre 2019 nell'ambito del pre-test delle prove standardizzate di matematica per la quinta primaria, che ha coinvolto un campione statisticamente significativo di allievi di prima secondaria di primo grado del Canton Ticino. La scelta del livello scolastico per la fase di pre-test deriva dal fatto che le prove ufficiali sarebbero state somministrate nel mese di maggio nelle classi di quinta primaria, dunque, per questioni legate ai tempi tecnici di validazione dei quesiti pretestati, si è individuato un campione significativo di studenti di prima secondaria di primo grado, per i quali è possibile ipotizzare un livello paragonabile a quello degli allievi di fine quinta primaria come temi trattati, esperienza scolastica e maturità personale. Il test è stato poi spostato di un anno a causa dell'emergenza sanitaria dovuta al COVID-19 ed è previsto per maggio 2021.

I quesiti pretestati (325 in totale) sono stati organizzati in 10 fascicoli in cui ve ne era un numero che andava da un minimo di 29 ad un massimo di 35 e sono stati somministrati a un campione di allievi variabile da 433 a 482. Le classi del campione sono state scelte in modo da essere rappresentative della popolazione degli studenti ticinesi di prima secondaria di primo grado (in tutto 162), così da bilanciare tutti i circondari scolastici del Canton Ticino e da essere equilibrato per genere. 21 di questi quesiti sono stati liberati e sono oggetto di analisi; tali quesiti sono stati inseriti nei fascicoli in modo casuale, per questo sono stati sottoposti a campioni diversi di studenti.

In questo articolo sono stati analizzati tre di questi 21 quesiti che vertono sulla conoscenza di termini specialistici e rientrano nell'ambito di competenza *Geometria*, relativi alla risorsa cognitiva *Sapere e riconoscere* prevista dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015, p. 154). I contenuti geometrici coinvolti in questi quesiti sono legati alle figure piane, ai loro elementi e alle loro proprietà. Si tratta dunque di saperi che dovrebbero essere padroneggiati dagli allievi al termine della quinta primaria, anche in riferimento ai traguardi di apprendimento esplicitati nel Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015, p. 148), non distanti da quelli italiani.

Nei tre quesiti si chiede agli allievi di *sostituire* un gruppo di parole con il termine specifico avente lo stesso significato, scelto all'interno di un elenco di termini proposti. Si tratta, cioè, di realizzare un'operazione linguistico-cognitiva di sintesi e di selezione nel proprio repertorio lessicale. Riportiamo di seguito il testo dei tre quesiti oggetto di analisi.

Q1. Primo quesito

Nel primo (Q1) viene chiesto agli allievi di scegliere in un elenco di sostantivi il termine sintetico (un solo termine) che denomina la grandezza da sostituire al sintagma nominale analitico, cioè composto di più parole, "lunghezza del contorno"; si tratta dunque in questo caso dell'individuazione del termine *perimetro*.

> Leggi la seguente frase prestando attenzione alla parte sottolineata, che dovrà essere sostituita da un'unica parola tra quelle elencate nel riquadro successivo.
>
> <u>Lunghezza del contorno</u> di una figura piana.
>
> Quale parola metteresti?
>
> | |
> |---|
> | bordo, angolo, area, diagonale, confine, vertice, perimetro, centro, superficie, misura. |
>
> ……………………………… di una figura piana.

È interessante notare che, a meno che non si risalga all'etimologia del termine (dal greco *perímetros*, composto da *perí*, "intorno", e *métron*, "misura"), dunque "misura di un contorno", il termine sintetico *perimetro* è del tutto opaco, e gli usi estesi che di esso si possono fare nella lingua comune non sono molti, né frequenti, né abituali nei discorsi dei bambini e addirittura forvianti se si applicano in ambito geometrico. Va infatti considerato che tali usi del termine *perimetro* in lingua comune portano a considerarlo come sinonimo di *contorno*, mentre in ambito matematico vi è una distinzione netta nel significato dei due termini: il contorno è un ente geometrico, una linea chiusa che delimita una parte di piano, mentre il perimetro è la sua lunghezza.

Nel *Grande Dizionario Italiano dell'uso*, *Gradit*, di Tullio De Mauro (2000), alla voce "perimetro" compare al primo posto l'accezione della geometria: "1. TS [tecnico-specialistico] geom. somma della lunghezza dei lati di un poligono | l'insieme dei suoi lati"; come seconda accezione si ha invece l'uso estensivo: "2. CO [comune] estens., contorno di una superficie, di un'area, della base di un solido", seguito da esempi come "*un filare lungo il perimetro del campo, le mura corrono lungo tutto il perimetro della città*", che testimoniano l'uso di tale termine come quasi-sinonimo di *contorno*. Si nota come anche nell'accezione propria della geometria il termine *perimetro* viene associato a una lunghezza ("somma della lunghezza dei lati di un poligono"), ma anche a un ente geometrico ("l'insieme dei suoi lati"), creando un'ambiguità anche nell'ambito della matematica stessa.

Q2. Secondo quesito

Nel secondo quesito (Q2) viene chiesto agli allievi di confrontarsi con una serie di aggettivi qualificativi specialistici dell'ambito della geometria, uno solo dei quali ("*regolare*") è quello corretto per individuare in forma sintetica un tipo di poligono; vanno dunque riconosciute le proprietà caratterizzanti che vengono riassunte da un unico termine. Il termine specialistico *regolare* sostituisce una porzione di testo piuttosto lunga, e cioè le due seguenti locuzioni unite dalla congiunzione "e": "con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza". Va considerato che in ambito geometrico solitamente un aggettivo viene attribuito a un'unica proprietà/locuzione (ad esempio "un triangolo con i lati della stessa lunghezza è detto *equilatero*"), mentre in questo caso il termine *regolare* sintetizza in un unico termine la contemporaneità di due proprietà/locuzioni. L'allievo dovrebbe quindi riuscire a ricondurre un sapere presentato in forma distesa, analitica (nelle due locuzioni *con tutti i lati… e tutti gli angoli…*), al solo termine *regolare*, "impacchettandolo" pertanto in un unico aggettivo.

Leggi la seguente frase prestando attenzione alla parte sottolineata, che dovrà essere sostituita da un'unica parola tra quelle elencate nel riquadro successivo.

Poligono <u>con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.</u>

Quale parola metteresti?

equivalente, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, uguale, isoscele.

Poligono …………………………………………………….......................................

Va osservato che l'aggettivo *regolare* è un termine tecnico non esclusivo della matematica, ma dotato di un'elevata polisemia (il *Gradit* di De Mauro riporta 12 accezioni, 8 delle quali riconducibili ad altrettanti ambiti tecnico-specialistici, fra i quali non compare, però, la matematica): regolare nel senso di "conforme alla regola o alle regole, che non contrasta con un regolamento, con le regole stabilite", ma anche "che ha una frequenza, una periodicità o una durata costante, normale" e poi ancora "che non contrasta con le norme linguistiche più frequenti" in grammatica o "reclutato secondo le leggi vigenti, soggetto alla disciplina ordinaria e inquadrato all'interno di un esercito: *soldato regolare*" nel lessico militare. Il significato specifico della matematica che viene proposto in questo quesito è tutt'altra cosa, e necessita di uno specifico sapere disciplinare il cui uso in ambito didattico è meno frequente rispetto ad altre parole, tra le quali il termine precedente *perimetro*.

Q3. Terzo quesito

Nel terzo quesito (Q3) viene chiesto agli allievi di trovare un'equivalenza di significato fra una locuzione aggettivale di tipo analitico ("sovrapponibili punto per punto") e i corrispondenti aggettivi specialistici di forma sintetica: "*congruenti*" o "*uguali*"; queste due opzioni vengono entrambe accettate tra le risposte considerate corrette, dato che è consuetudine nella scuola primaria utilizzare il più improprio termine *uguale*, di altissimo uso nella lingua comune, in sostituzione del termine più preciso *congruente*. Nel dizionario *Gradit,* per il termine *uguale* si trovano 10 accezioni, la quinta delle quali rientra in ambito matematico. In particolare, per quanto concerne la geometria troviamo "di figure che, sovrapposte, coincidono"; mentre per il termine *congruente* sono presenti 3 accezioni, la seconda delle quali riguardante la matematica ("equivalente in una relazione di congruenza: *grandezze*, *numeri congruenti*"), senza nessun riferimento esplicito alla geometria.

Leggi la seguente frase prestando attenzione alla parte sottolineata, che dovrà essere sostituita da un'unica parola tra quelle elencate nel riquadro successivo.

Due figure <u>sovrapponibili punto per punto</u> hanno necessariamente la stessa area.

Quale parola metteresti?

congruenti, adiacenti, successive, regolari, irregolari, equilatere, uguali, isosceli, convesse, concave.

Due figure ……………………………………………… hanno necessariamente la stessa area.

Il quesito Q3 si differenzia dai primi due in quanto la frase stimolo è una frase con la forma Soggetto-Verbo-Oggetto che esprime una proprietà geometrica delle figure piane ("due figure *congruenti* hanno necessariamente la stessa area"), invece nei primi due quesiti si tratta di sintagmi nominali (in Q1: "*perimetro* di una figura piana"; in Q2: "poligono *regolare*").

A parte questa distinzione, la formulazione della consegna nei tre quesiti è la stessa; inoltre, tutte le parole riportate come alternative in tutti e tre i quesiti fanno parte dell'ambito geometrico e sono tutte plausibili, e accordate allo stesso modo in genere e numero in relazione a ciò cui si riferiscono nella frase; l'allievo non ha dunque la possibilità di escludere a priori nessun termine servendosi di elementi grammaticali. Va anche specificato che è stata considerata valida sia la risposta in cui l'allievo indica (sottolineando o cerchiando) la parola corretta presente nel riquadro, sia se tale parola viene scritta nell'apposito spazio in fondo al testo.

4. Le difficoltà nell'individuare il termine specialistico

Dai risultati dei tre quesiti emergono difficoltà nell'individuare i termini da sostituire, soprattutto per quanto concerne la parola *regolare* (quesito Q2, Tabella 1), diffusa nel lessico di tutti i giorni con usi distinti da quello geometrico, ma sicuramente meno frequente in ambito matematico rispetto a *perimetro* (quesito Q1), *congruente* o *uguale* (quesito Q3); questi tre tecnicismi vengono solitamente introdotti fin dalla terza primaria e sono trattati in numerosi contesti didattici, mentre il termine *regolare* viene di solito introdotto in quarta o direttamente in quinta primaria. Inoltre, il termine *regolare* sostituiva nel Q2 non una, ma due locuzioni unite dalla congiunzione "e", complicando la richiesta. Si riportano di seguito i risultati ottenuti nei tre quesiti:

Tabella 1
La distribuzione percentuale delle risposte corrette, errate e mancanti nei tre item

	Q1 somministrato a 440 allievi	**Q2 somministrato a 440 allievi**	**Q3 somministrato a 448 allievi**
Risposte corrette	50,2%	14,8%	42,0%
Risposte errate	36,2%	63,4%	28,1%
Risposte mancanti	13,6%	21,8%	29,9%

Per quanto concerne le risposte mancanti, si osserva che il quesito Q3 registra anche il maggior numero di allievi che lascia in bianco la risposta (29,9%). Poiché i tre quesiti erano inseriti praticamente nella stessa posizione all'interno dei fascicoli (Q1 22-esimo, Q2 e Q3 23-esimo), tale differenza di percentuale di risposte mancanti non è dunque attribuibile alla difficoltà degli allievi nell'arrivare a leggere la domanda (cioè al tempo o alla stanchezza).

A questo punto esaminiamo più da vicino, a livello qualitativo, i comportamenti più diffusi adottati dagli allievi per rispondere ai tre quesiti.

Per quanto concerne le risposte scorrette, come mostrato in Tabella 2, in tutti e tre i quesiti la maggior parte dei soggetti sceglie – come da consegna − una delle parole elencate nei riquadri; in piccole percentuali (ma non del tutto trascurabili) fanno scelte alternative, che commenteremo in seguito (par. 4.2).

Tabella 2
Distribuzione percentuale dei comportamenti che hanno portato a una risposta errata

	Q1 somministrato a 440 allievi	**Q2 somministrato a 440 allievi**	**Q3 somministrato a 448 allievi**
Risposte errate (percentuale totale)	**36,2%**	**63,4%**	**28,1%**
L'allievo seleziona un termine errato fra quelli dell'elenco	32,3%	55,5%	24,5%
L'allievo propone una scelta alternativa	3,9%	7,9%	3,6%

Riportiamo di seguito il commento delle due tipologie di risposte errate.

4.1. Selezione di un termine errato fra quelli dell'elenco

Entriamo nel dettaglio delle scelte (errate) delle parole proposte in ciascun quesito, esaminandole una per una poiché riguardano argomenti geometrici distinti.

4.1.1. Quesito Q1

Tabella 3
Risposte errate selezionate tra i tecnicismi proposti dal quesito Q1

Termini errati scelti dall'elenco fornito dal quesito Q1		**Percentuale del campione**	
L'allievo seleziona un termine errato fra quelli dell'elenco	*Superficie*	8,0%	32,3%
	Bordo	6,8%	
	Misura	5,9%	
	Area	5,2%	
	Altri termini dell'elenco	6,4%	

Le parole proposte nel quesito (riportate in Tabella 3 colonna 2) in alcuni casi sono riferite a enti geometrici di diverse dimensioni l'uno rispetto all'altro (per esempio "*superficie*", "*bordo*"), mentre in altri sono inerenti a grandezze (per esempio "*misura*", "*area*"). Dalle risposte degli allievi emerge confusione nello scegliere la parola geometrica da sostituire alla locuzione, cosa che può far pensare a diffuse difficoltà nel distinguere tra enti geometrici di dimensioni diverse e relative grandezze. In effetti, la parola errata maggiormente scelta dall'elenco proposto è "*superficie*" (8,0%): in questo caso, dunque, l'allievo commette sia l'errore di associare una grandezza ("lunghezza") a un oggetto geometrico che di solito non è associato ad una grandezza ("parte di piano"), sia quello di accostare un ente unidimensionale com'è il *contorno* all'ente bidimensionale *superficie*. Sebbene la frase completata dall'allievo abbia senso dal punto di vista linguistico (è possibile parlare di *superficie di una figura piana*), la risposta non è adeguata in base alla consegna data. Seguono poi le risposte "*bordo*" (6,8%), "*misura*" (5,9%), "*area*" (5,2%), che mettono in evidenza, in modi diversi, la poca consapevolezza del significato del termine *perimetro* e, quindi, la difficoltà di fondo a gestire un argomento relativo all'ambito Grandezze e misure. Già nelle prove standardizzate di matematica somministrate nel 2013 a tutti gli allievi di quarta primaria del Canton Ticino erano emerse diverse lacune relative al concetto di perimetro (Sbaragli & Franchini, 2014). Dal punto di vista didattico è interessante cogliere questi "segnali" lessicali, perché possono effettivamente essere spie utili del sapere in costruzione. Ad esempio, quale aspetto del sapere manca? È incompleto o non è chiaro a coloro che hanno optato ad esempio per *bordo* o per *misura*? Si tratta di scelte che condividono una parte di semantica con *perimetro*, in un caso si contempla il contorno nell'altro una misura: sta al docente insieme agli allievi uscire dalla logica del mero errore per intraprendere una strada coraggiosa e faticosa incentrata sulla ricerca delle cause, scegliendo di ragionare sulle parole e su ciò che veicolano.

Il 6,4% degli allievi sceglie un'altra delle diverse parole dell'elenco, con percentuali molto piccole, mettendo comunque in evidenza come tutta la varietà di parole venga effettivamente scelta.

4.1.2. Quesito Q2

Tabella 4

Risposte errate selezionate tra i tecnicismi proposti dal quesito Q2

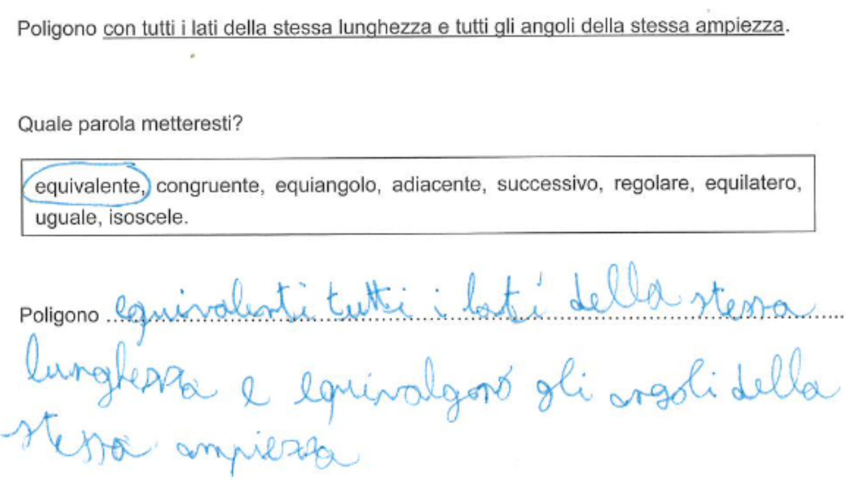
Termini errati scelti dall'elenco fornito dal quesito Q2		**Percentuale del campione**	
L'allievo seleziona un termine errato fra quelli dell'elenco	*Equilatero*	20,5%	55,5%
	Equivalente	14,5%	
	Congruente	11,4%	
	Uguale	5,2%	
	Altri termini dell'elenco	3,9%	

La parola errata maggiormente scelta dall'elenco del quesito Q2 è "*equilatero*" (20,5%). Questa scelta deriva probabilmente dal fatto che il poligono regolare con il minor numero di lati è il triangolo equilatero, dunque l'uso di tale termine potrebbe essere stato generalizzato per tutti i poligoni. Oppure tale scelta potrebbe essere dovuta a una *lettura selettiva del testo*, rivelando quindi una mancanza di comprensione dell'informazione fornita nella sua totalità; in questi casi gli allievi hanno posto l'attenzione solo sulla prima parte della frase "Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza", cioè, appunto, *equilatero*, ignorando la seconda, derivante forse anche dall'abitudine degli allievi ad attribuire a un aggettivo una proprietà espressa da una sola locuzione, mentre in questo caso un aggettivo porta il significato di due locuzioni aggettivali (simmetriche e connesse tra loro dalla "e", che indica una relazione di aggiunta di informazione).

Segue poi la parola "*equivalente*" (il 14,5%), composto che condivide il prefisso, *equi-* (*aequus*, "uguale"), con il termine maggiormente scelto per questo quesito ("*equilatero*"): i due termini, quindi, si assomigliano e condividono parte del significato (l'idea di "qualcosa di uguale" o di "presente in egual numero"). Va notato, consultando un qualsiasi dizionario, che nella lingua naturale l'aggettivo *equivalente* ha un significato ben più ampio e aspecifico di quello tecnico-specialistico di ambito geometrico o di altri ambiti specialistici (meccanica, chimica).

Tornando all'accezione specialistica della geometria, nella scuola primaria e secondaria di primo grado il termine *equivalente* è inteso abitualmente soltanto come sinonimo di *equiesteso*. Dalla scuola secondaria di secondo grado, l'accezione specialistica di tale parola inizia, poi, a individuare una gamma più vasta di referenti, in quanto viene associato alle *relazioni di equivalenza*, tra le quali rientra anche l'equiestensione: gli studenti si trovano a questo punto confrontati con un'estensione del potere identificativo di tale termine, che si applica a diversi tipi di relazioni rivelando così un significato più vasto, e con il conflitto cognitivo che si instaura tra il bagaglio lessicale specialistico precedente, limitato e circoscritto, e la scoperta del suo più ampio uso in seno alla disciplina.

Riportiamo un esempio di protocollo nel quale l'allievo sembra aver adottato il significato più comune nella lingua dell'uso della parola *equivalente,* nel senso intuitivo di "che equivale, che ha valore uguale": "*equivalenti tutti i lati della stessa lunghezza e equivalgono gli angoli della stessa ampiezza*", senza essere riuscito a "impacchettare" queste caratteristiche nell'unico aggettivo "regolare".


Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.

Quale parola metteresti?

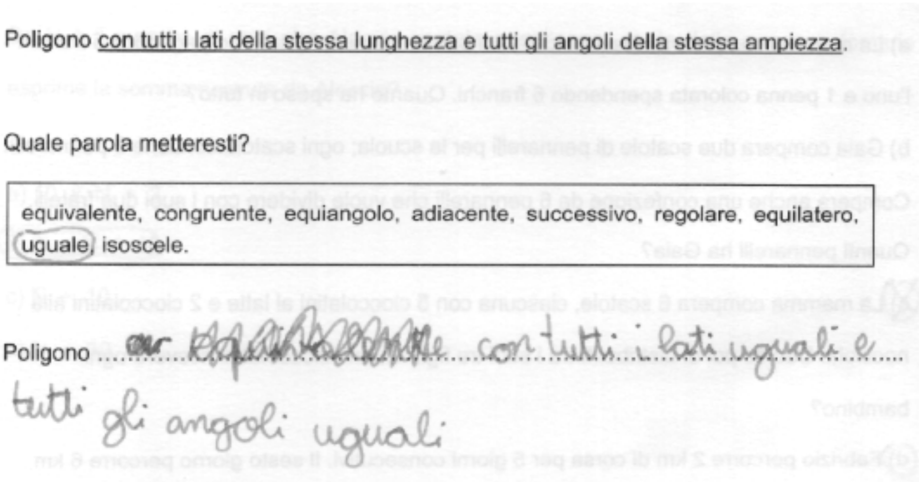
equivalente, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, uguale, isoscele.

Poligono equivalenti tutti i lati della stessa lunghezza e equivalgono gli angoli della stessa ampiezza

Figura 1. La scelta di *equivalente*: un esempio.

In realtà, al di là della non correttezza della risposta, anche la sola formulazione linguistica ci lascia vedere qualcosa di interessante del processo cognitivo in atto: la parola scelta, infatti, non viene presa com'è data, ma flessa ("*equivalenti*", e addirittura coniugata: "*equivalgono*", dal verbo "equivalere"); in luogo di un'unica, economica e mirata sostituzione, l'allievo impiega ben 14 parole nel tentare di "dire" qualcosa, di spiegarsi, anche se non richiesto, palesando un evidente sforzo espressivo (formulare una pseudo-frase). Non sarà stata adeguatamente letta e compresa la consegna? Oppure, non sapendo rispondere efficacemente, prende forma su carta una sorta di ansia? È come vedere, in concreto, la distanza fra il mondo cognitivo e concettuale dell'allievo e quello della disciplina, che ha non solo contenuti, ma anche forme espressive ben definite che li veicolano, chiare, precise, essenziali, riconducibili ai tratti illustrati all'inizio di questo articolo; tratti da cui uno studente come questo è lontanissimo. Simili protocolli confermano dunque quanto la lingua comune abbia un'influenza non trascurabile sulla costruzione e sulla comunicazione del sapere disciplinare.

Proseguendo nell'analisi dei termini errati più scelti dagli allievi per il quesito Q2 seguono "*congruente*" e "*uguale*" con percentuali di risposta rispettivamente dell'11,4% e 5,2%. Dall'analisi dei protocolli sembra che diverse di tali risposte siano dovute alla sostituzione effettuata in modo corretto di una sola parte della frase sottolineata ("della stessa lunghezza" e "della stessa ampiezza") con i termini *uguale* o *congruente*, e non l'intera frase, come dimostrano i seguenti due protocolli:



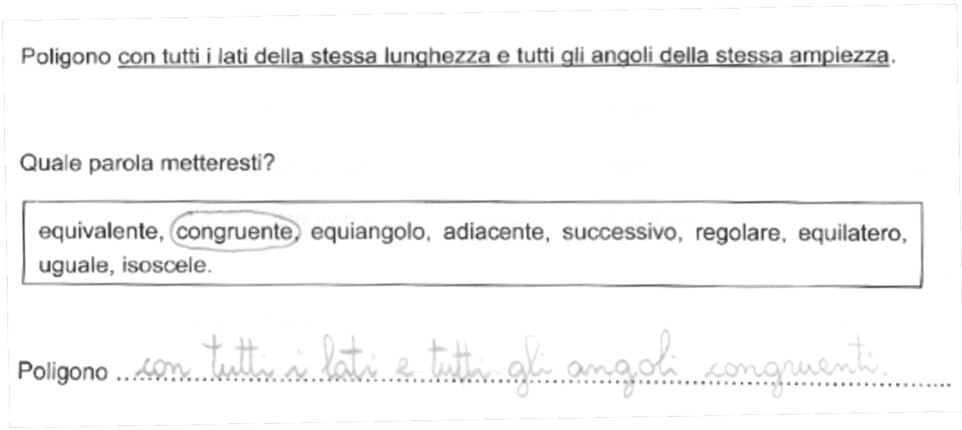
Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.

Quale parola metteresti?

equivalente, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, uguale, isoscele.

Poligono .... con tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali

Figura 2. La scelta di *uguale*: un esempio.



Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.

Quale parola metteresti?

equivalente, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, uguale, isoscele.

Poligono ...con tutti i lati e tutti gli angoli congruenti.

Figura 3. La scelta di *congruente*: un esempio.

In essi, fra l'altro, *uguale* e *congruente* non vengono mantenuti al singolare e riferiti a "poligono" (come da richiesta), ma accordati al plurale con gli elementi "lati" e "angoli". Un altro aspetto su cui vale la pena condurre una riflessione congiunta tra aspetti linguistici e matematici è il fatto che queste tre parole (*equivalente*, *congruente* e *uguale*) hanno un significato prettamente relazionale ossia hanno un senso solo se trattate all'interno di una relazione binaria. Un poligono non può, infatti, essere *equivalente* (ma nemmeno *congruente* o *uguale*) in sé, ma lo può essere solo in relazione a un altro poligono, mentre un poligono può certamente essere *regolare* in sé, se soddisfa le caratteristiche appunto di avere "tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza". Una considerazione di questo tipo avrebbe potuto portare gli allievi a scartare a priori queste parole. Tuttavia, va considerato che non è raro sentire parlare gli allievi, ad esempio, di “retta parallela” o “insieme equipotente” in modo assoluto e non relazionale, dimostrando di non rendersi conto che affermazioni del genere sono totalmente prive di senso (D’Amore, 2000). Un atteggiamento come questo conferma la lacunosità nella competenza metalinguistica di farsi domande e operare confronti rispetto alle parole che si usano: si tratta di una competenza che andrebbe incentivata a scuola, e che forse solo a scuola si può allenare, poiché scarsi strumenti in questo senso possono originare una comunicazione approssimativa e non precisa, in campo specialistico e non solo.

Il 3,9% degli allievi sceglie, poi, un’altra delle diverse parole presenti nell’elenco, ciascuna con percentuali di scelta molto piccole.

4.1.3. Quesito Q3

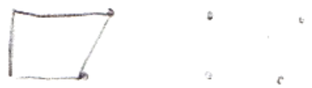
Tabella 5

Risposte errate selezionate tra i tecnicismi proposti dal quesito Q3

<table>
<tr><th colspan="2">Termini errati scelti dall’elenco fornito dal quesito Q3</th><th>Percentuale del campione</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="5">L’allievo seleziona un termine errato fra quelli dell’elenco</td><td>Regolari</td><td>7,1%</td><td rowspan="5">24,5%</td></tr>
<tr><td>Equilatere</td><td>5,8%</td></tr>
<tr><td>Adiacenti</td><td>3,1%</td></tr>
<tr><td>Concave</td><td>2,2%</td></tr>
<tr><td>Altri termini dell’elenco</td><td>6,3%</td></tr>
</table>

Il termine errato maggiormente scelto dall’elenco fornito nel quesito Q3 è “*regolari*” (7,1%). Va considerato che la frase “Due figure *regolari* hanno necessariamente la stessa area” è una frase linguisticamente ammissibile e grammaticalmente corretta, che risulta però contenutisticamente non vera. Seguono poi gli aggettivi “*equilatere*” (5,8%), “*adiacenti*” (3,1%) e “*concave*” (2,2%); tra le varie scelte, come si può notare alcune richiamano in senso più o meno lato un’idea di uguaglianza fra qualche aspetto (*regolari*, *equilatere*), quindi si avvicinano maggiormente al significato delle parole corrette, mentre altre se ne discostano (*adiacenti*, *concave*). Va anche considerato che il 6,3% degli allievi sceglie un’altra delle parole dell’elenco, ciascuna con percentuali molto piccole, mostrando una grande varietà di scelta.

Ci sono, poi, protocolli con soluzioni particolari come il seguente (Figura 4), in cui la parola selezionata, “*successive*”, viene pure trascritta con un errore ortografico (una sola *c*). La risposta scelta è accompagnata da una rappresentazione figurale nella parte alta del protocollo, da cui si intuisce la volontà di disegnare due figure congruenti, una di seguito all’altra (la seconda è solo accennata). Potrebbe essere stato il posizionamento delle figure congruenti, che tradizionalmente si disegnano una di seguito all'altra, a condurre alla scelta dell'aggettivo *successive.*



Leggi la seguente frase prestando attenzione alla parte sottolineata, che dovrà essere sostituita da un'unica parola tra quelle elencate nel riquadro successivo.

Due figure <u>sovrapponibili punto per punto</u> hanno necessariamente la stessa area.

Quale parola metteresti?

congruenti, adiacenti, successive, regolari, irregolari, equilatere, uguali, isosceli, convesse, concave.

Due figure ..Sucessive..................... hanno necessariamente la stessa area.

Figura 4. Una risposta errata (*successive*) al quesito Q3, con errore ortografico.

4.2. Scelte alternative di risposte errate

Come abbiamo mostrato in precedenza, una piccola percentuale di allievi per ciascun quesito (3,9% per Q1; 7,9% per Q2; 3,6% per Q3) opera scelte alternative rispetto al selezionare un termine tra quelli proposti. Ciò potrebbe dipendere da una lettura superficiale o veloce del testo, dalla difficoltà a comprendere appieno la consegna, dalla fretta di rispondere, da una sorta di scarsa fiducia nei confronti degli autori dei quesiti (pur essendo una prova standardizzata) o da altre cause specifiche sempre legate alla comprensione, come il voler attribuire un termine per ciascuna locuzione presente (nel caso del quesito Q2).

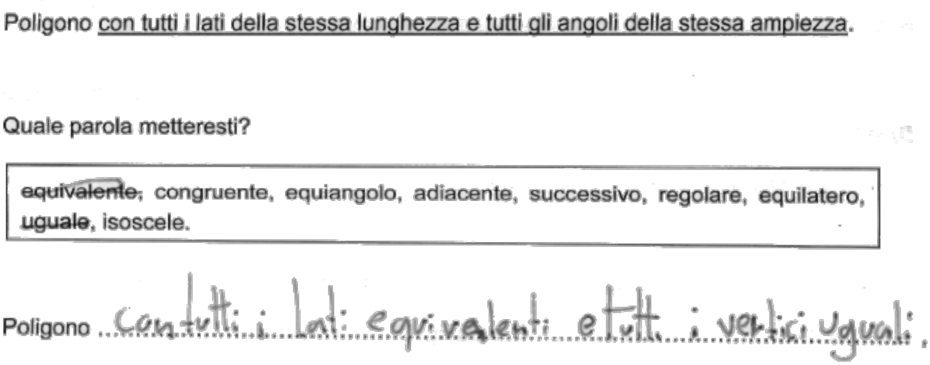
Le categorie di scelte alternative sono le seguenti:

Selezione di più termini dagli elenchi proposti

In tutti e tre i quesiti una piccola percentuale di allievi seleziona più di un termine, non seguendo dunque le indicazioni del testo della domanda che parla di *una* parola, ma sentendosi forse più sicuro selezionando più alternative. Tra questi, alcuni scelgono anche la parola corretta prevista dalla domanda.

Nel seguente protocollo legato al quesito Q2 sembra che la scelta di due parole per rispondere alla richiesta (*equivalente* e *uguale*) sia dettata dal volerne trovare una per la prima locuzione ("con i lati della stessa lunghezza":

l'allievo scrive sotto "*con tutti i lati equivalenti*") e una per la seconda ("con gli angoli della stessa ampiezza": l'allievo scrive sotto "*e tutti i vertici uguali*"):


Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.

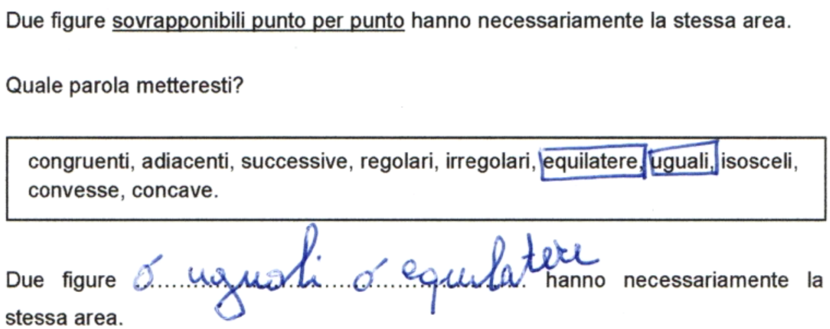
Quale parola metteresti?

~~equivalente~~, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, ~~uguale~~, isoscele.

Poligono Con tutti i lati equivalenti e tutti i vertici uguali.

Figura 5. Un esempio di selezione multipla dei termini (Q2).

Riguardo al quesito Q3 mostriamo invece un protocollo esemplificativo nel quale l'allievo ritiene significativo precisare il valore disgiuntivo della sua scelta tramite la "o" ripetuta due volte, intesa come inclusiva (nel senso di vel), considerando forse in questo caso i due termini *uguali* ed *equilatere* come sinonimi:


Due figure sovrapponibili punto per punto hanno necessariamente la stessa area.

Quale parola metteresti?

congruenti, adiacenti, successive, regolari, irregolari, equilatere, uguali, isosceli, convesse, concave.

Due figure ó uguali ó equilatere hanno necessariamente la stessa area.

Figura 6. Un esempio di selezione multipla dei termini (Q3).

Questa risposta non corretta è un esempio di risposta in cui si può intravedere il processo di scelta sotteso: sarebbe interessante e proficuo riprendere il quesito con l'allievo e discutere sull'equivalenza semantica che ha attribuito alle due parole, e sulle differenze fra le due e la parola target, magari osservando i termini in contesti diversi e commentandoli.

Termini o locuzioni non presenti nell'elenco fornito
Nonostante i quesiti chiedessero in modo esplicito di scegliere un unico termine dall'elenco riportato, una parte di allievi (il 3,2% nel Q1 e il 3,8% nel Q2) riporta parole o addirittura locuzioni non presenti. All'interno di questa categoria, riportiamo alcuni esempi relativi al quesito Q1. Nel primo (Figura 7) l'allievo precisa un termine proposto nell'elenco, scrivendo la "*lunghezza del perimetro*", cadendo però nell'inesattezza in quanto ridondante, essendo già implicito il concetto di lunghezza nel termine *perimetro*, solitamente definito come "la lunghezza del contorno". In tal senso, "spacchettando" la frase scritta dall'allievo, avremmo "lunghezza della lunghezza del contorno", quindi una ridondanza del concetto. Sembra dunque che anche in questo caso il perimetro venga confuso con il concetto di contorno:

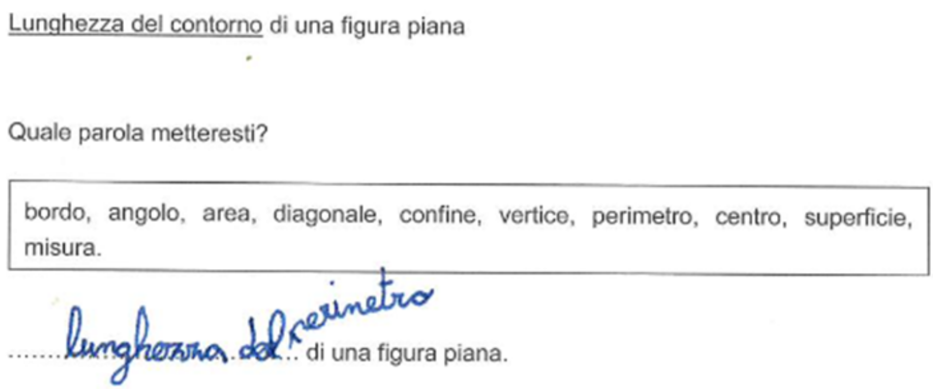
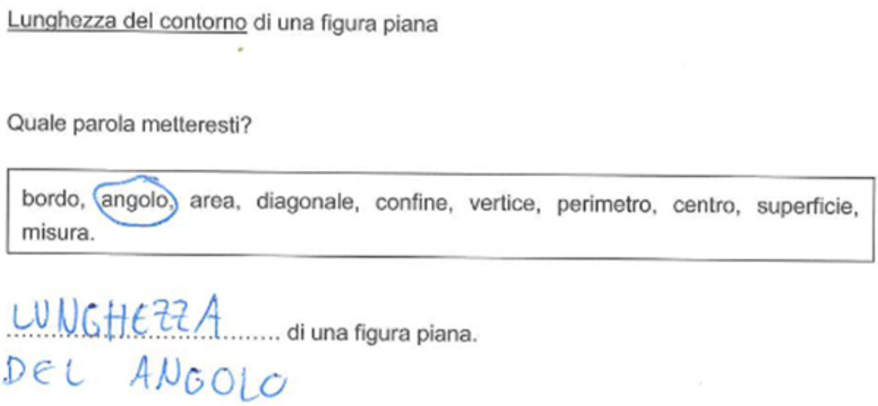


Figura 7. Un esempio di formulazione ulteriore rispetto alle opzioni date (Q1).

Dal punto di vista didattico, per comprendere in profondità il significato di tali termini è richiesto un intervento mirato da parte del docente allo scopo di chiarire agli allievi l'ambiguità che spesso si presenta tra questi termini, e in modo analogo anche tra *superficie* ed *estensione/area*, e *spazio* e *volume*, che troppo spesso sono considerati dal linguaggio quotidiano come sinonimi, ma che assumono invece in matematica un significato specifico.

Nell'esempio in Figura 8 l'allievo commette anche l'errore di associare un ente geometrico (angolo) a una grandezza scorretta (lunghezza), che non lo caratterizza: si evince dunque non solo la confusione tra ente geometrico e grandezza associata, ma anche sul tipo di grandezze legate a un certo oggetto geometrico (degli angoli si misura l'ampiezza, non la lunghezza).


Lunghezza del contorno di una figura piana

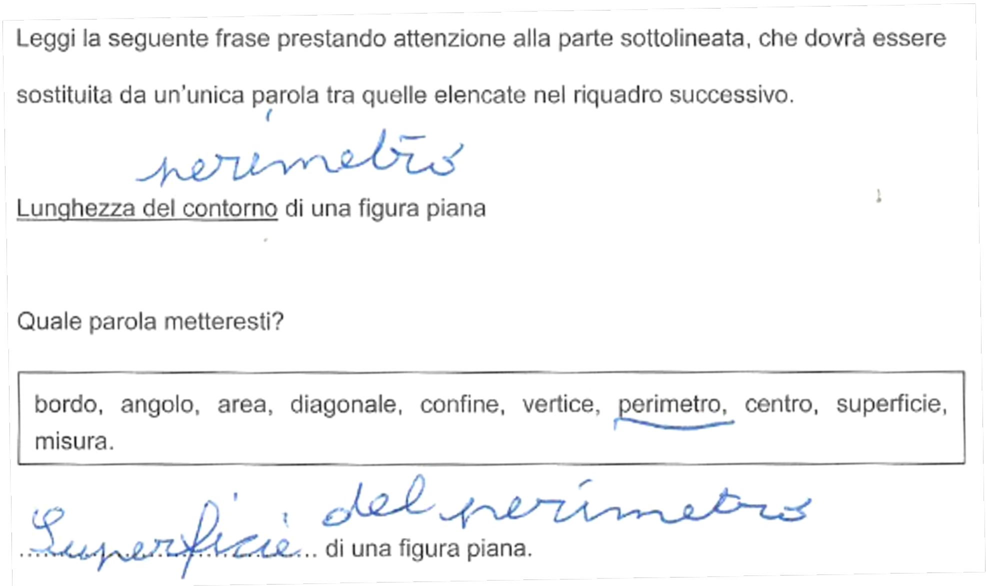
Quale parola metteresti?

bordo, angolo, area, diagonale, confine, vertice, perimetro, centro, superficie, misura.

LUNGHEZZA DEL ANGOLO di una figura piana.

Figura 8. Un esempio di formulazione ulteriore rispetto alle opzioni date (Q1).

Situazione diversa è quella del protocollo seguente, in cui l'allievo identifica correttamente la parola richiesta, ma poi riscrive la frase in modo scorretto, abbinando insieme due termini, *superficie* e *perimetro*, che sono riferiti a enti di dimensioni diverse:


Leggi la seguente frase prestando attenzione alla parte sottolineata, che dovrà essere sostituita da un'unica parola tra quelle elencate nel riquadro successivo.

perimetro

Lunghezza del contorno di una figura piana

Quale parola metteresti?

bordo, angolo, area, diagonale, confine, vertice, perimetro, centro, superficie, misura.

Superficie del perimetro di una figura piana.

Figura 9. Un esempio di formulazione ulteriore rispetto alle opzioni date (Q1).

Ci sono poi alcuni casi in cui il singolo termine inserito non si trova nell'elenco fornito né sembra avere a che vedere con il contenuto della frase, come nel seguente esempio:

Lunghezza del contorno di una figura piana

Quale parola metteresti?

bordo, angolo, area, diagonale, confine, vertice, perimetro, centro, superficie, misura.

...particolari... di una figura piana.

Figura 10. Un esempio di formulazione ulteriore rispetto alle opzioni date e all'ambito matematico (Q1).

Riguardo al quesito Q2, alcuni allievi indicano una parola singola diversa da quella fornita nell'elenco, come ad esempio il termine "*quadrato*" (Figura 11), riportando un esempio di poligono con le caratteristiche esplicitate nella frase.

Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.

Quale parola metteresti?

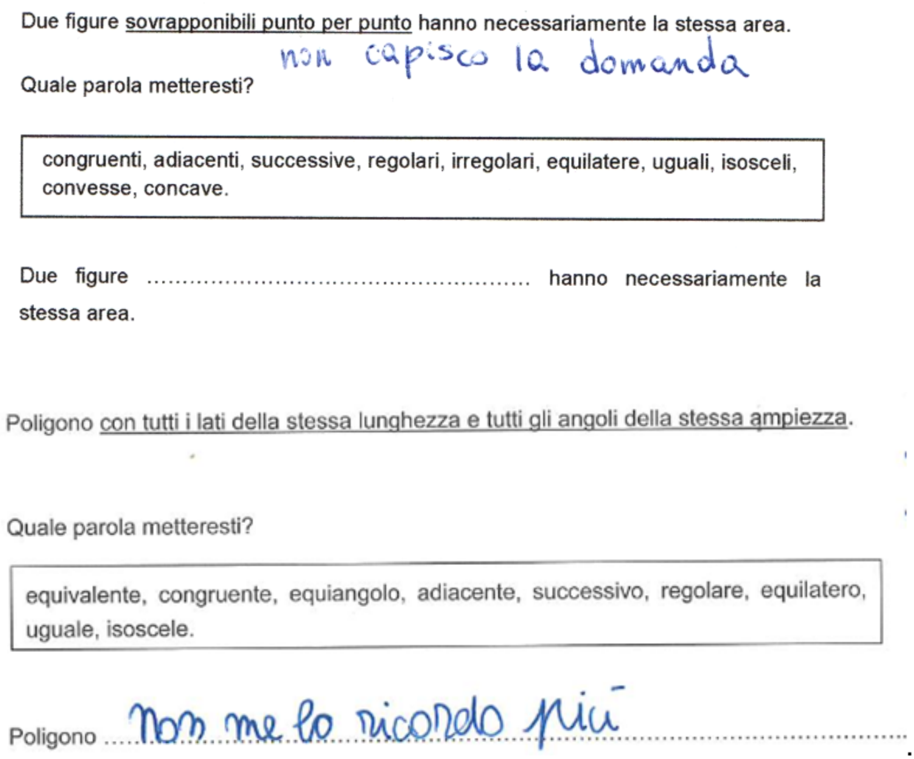
equivalente, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, uguale, isoscele.

Poligono ...quadrato...

Figura 11. Un esempio di formulazione ulteriore rispetto alle opzioni date (Q2).

Dichiarazione di non conoscenza del termine

Infine, tra le scelte alternative di risposte errate, ci sono anche quelle in cui gli allievi dichiarano di non ricordarsi quale sia la parola corretta o di non capire la domanda (0,5% per Q2 e 1,6% per Q3), come nei seguenti protocolli (Figura 12):



Due figure sovrapponibili punto per punto hanno necessariamente la stessa area.

Quale parola metteresti? non capisco la domanda

congruenti, adiacenti, successive, regolari, irregolari, equilatere, uguali, isosceli, convesse, concave.

Due figure .... hanno necessariamente la stessa area.

Poligono con tutti i lati della stessa lunghezza e tutti gli angoli della stessa ampiezza.

Quale parola metteresti?

equivalente, congruente, equiangolo, adiacente, successivo, regolare, equilatero, uguale, isoscele.

Poligono Non me lo ricordo più ....

Figura 12. Esempi di protocolli in cui gli allievi dichiarano di non ricordarsi quale sia la parola corretta o di non capire la domanda.

Atteggiamenti come questo, che spesso demotivano allievi e docente, devono essere guardati in modo meno negativo, perché possono comunque essere significativi in quanto rivelano una presa di coscienza del "vuoto" lessicale che ci si trova a dover gestire. Rispetto a questa presa di coscienza, la scuola dovrebbe cercare di incentivare un atteggiamento metacognitivo efficace, che permetta all'allievo di provare ad affrontare la situazione. Occorre sapersi porre giuste domande (*Saprei dire che cosa non mi è chiaro nella domanda? Il mio vuoto è proprio solo lessicale o c'entra il contenuto matematico? Cioè mi manca la parola esatta, ma saprei spiegarmi, oppure ho dei dubbi legati ai contenuti? Che cosa posso fare nell'uno e nell'altro caso?*) e poi avere la possibilità di ricorrere a strumenti per superare il blocco, incrementando efficacemente il proprio sapere (consultare manuali, chiedere, parlarne con compagne e compagni, confrontare e discutere le differenti risposte che magari si trovano percorrendo vie diverse ecc.). Se questo non si può fare durante una prova standardizzata, il cui fine è di verifica, senz'altro può essere sperimentato poi, traendo dalle prove standardizzate spunti di lavoro a lungo termine.

5. Conclusioni: lessico come dimensione di complessità e come sfida didattica

Il lessico è una realtà complessa, ma ricca, su cui vale la pena investire tempo e attenzione in didattica. Per dare conto di questa complessità, gli studiosi si sono a lungo interrogati su che cosa significhi davvero conoscere una parola (anche un tecnicismo) e hanno sintetizzato così le diverse componenti (Ferreri, 2005, p. 68; Demartini, 2016):

- forma fonica;
- forma ortografica;
- struttura morfologica;
- pattern sintattico (come si colloca nella sintassi di frase);
- significato/i;
- relazioni lessicali (come si situa rispetto ad altre parole: rapporti di sinonimia, ipo/iperonimia ecc.);
- collocazioni privilegiate (sequenze ricorrenti in cui si trova: in matematica, rifacendoci ai nostri casi, ad esempio l'abbinamento "poligono regolare").

È evidente che si tratta di un sapere a più livelli, che assume ulteriore peso quando si tratta di lessico specialistico: in esso, infatti, il significato rigoroso, preciso, denso, intensivo (Lavinio, 2004, p. 99), insieme al basso uso extrascolastico (a fronte, però, della marcata polisemia di numerose parole-termini) aggiungono un peso cognitivo notevole a carico della memorizzazione e della selezione, che vanno allenate con attività variate e frequenti.

Per quanto concerne la matematica, è ormai noto che la competenza comunicativa è parte dell'apprendimento. In questo senso, l'analisi dei quesiti qui presentata ha portato alla luce due aspetti generali da segnalare:

- diffuse difficoltà legate agli aspetti disciplinari nell'ambito Grandezze e misure e Geometria;
- diffuse difficoltà linguistiche nell'uso del linguaggio specialistico e nella gestione e comprensione dei connettivi (parole funzionali fondamentali nella costruzione del testo e del ragionamento).

Rispetto alle difficoltà lessicali che quotidianamente possono manifestarsi nelle classi, è opportuna una riflessione didattica che porti a rifondare la riflessione sulle parole (anche) in prospettiva interdisciplinare. Infatti, se è vero che è impossibile parlare di una didattica del lessico sistematica e di un monitoraggio preciso del sapere lessicale (quantitativo e qualitativo) di ognuno, per la "natura aperta e indeterminata" (Ferreri, 2005, p. 95) del lessico stesso, è altrettanto vero che la riflessione sulle parole ci accompagna sin da piccoli, ed è vero che è essenziale anche per un solido apprendimento disciplinare. Per questo è significativo, per un piano di azione nel campo del lessico lungo il percorso di scolarità, tenere presenti queste priorità:

l'appropriazione del vocabolario di base; le parole-chiave delle discipline di studio; la gestione dei sinonimi e dei diversi registri linguistici; il lessico trasversale della conoscenza (Ferreri, 2005). Su questi piani andrebbe fatto un lavoro sinergico, graduale e continuo, sollecitato da una pluralità di occasioni e di tipi di testo, sfruttando il potenziale offerto dalle singole discipline.

Le parole sono contenitori da aprire, perché dentro c'è il sapere (ad esempio c'è la matematica, che in poche parole dice molto), ma, estendendo lo sguardo, ci sono i legami logici, le storie, le sensazioni, le qualità delle cose e così via; proprio per ciò che contengono è importante che a scuola, anche nelle didattiche disciplinari, non si abbia paura di soffermarsi sul lessico, nemmeno su quello specialistico (spesso circondato da un'aura intoccabile), cominciando a "parlare delle parole", a smontarle, a capirle a fondo: ponendo domande, sperimentandone l'uso frequente, sbagliando e, pian piano, imparando a correggersi, soprattutto laddove il lessico deve essere preciso e referenziale, com'è nel caso dei tecnicismi.

Ringraziamenti

Si ringrazia Andrea Ferrari per la collaborazione alla codifica delle risposte ai quesiti oggetto di studio e alla raccolta dei protocolli significativi mostrati in questo articolo.

Riferimenti bibliografici

Canducci, M., Demartini, S., & Sbaragli, S. (in stampa). Plurale o singolare? Disomogeneità linguistica di numero nei manuali di matematica della scuola primaria e secondaria di primo grado italiani. *Italiano a scuola*, *3*.

Colombo, A., & Pallotti, G. (Eds.). (2014). *L'italiano per capire*. Roma: Aracne.

Cortelazzo, M. (1994). Testo scientifico e manuali scolastici. In M. L. Zambelli (Ed.), *La rete e i nodi: Il testo scientifico nella scuola di base* (pp. 3–14). Firenze: La Nuova Italia.

D'Amore, B. (1993). Esporre la matematica appresa: Un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289–301.

D'Amore, B. (2000). Lingua, matematica e didattica. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 28–47.

D'Aprile, M., Squillace, A., Armentano, P., Cozza, P., D'Alessandro, R., Lazzaro, C., Rossi, G., Scarnati, A. L., Scarpino, G., Servi, G., & Sicilia, R. (2004). Dillo con parole tue. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *27B*(1), 31–51.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport. Disponibile da www.pianodistudio.ch

Demartini, S. (2016). Insegnare e apprendere parole a scuola. In L. Cignetti, S. Demartini, & S. Fornara (Eds.), *Come TIscrivo? La scrittura a scuola tra teoria e* didattica (pp. 203–244). Roma: Aracne.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2019). La porta di entrata per la comprensione di un problema: La lettura del testo. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *5*, 9–43. doi: 10.33683/ddm.18.5.1

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2018). Dalla parola al termine: Il cammino verso l'apprendimento del lessico specialistico della matematica nelle definizioni dei bambini. In L. Corrà (Ed.), *La lingua di scolarizzazione nell'apprendimento delle discipline non linguistiche* (pp. 79–101). Roma: Aracne.

Demartini, S., Sbaragli, S., & Ferrari, A. (2020). L'architettura del testo scolastico di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado. *Italiano LinguaDue*, *12*(2), 160–180. Disponibile da www.italianolinguadue.unimi.it

De Mauro, T. (2000). *Gradit: Grande dizionario italiano dell'uso*. Torino: UTET.

De Mauro, T. (2014). L'italiano per capire e per studiare. In A. Colombo & G. Pallotti (Eds.), *L'italiano per capire* (pp. 19–28). Roma: Aracne.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *26A*(4), 469–496.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio: Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi: Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. Torino: Utet Università.

Ferreri, S. (2005). *L'alfabetizzazione lessicale: Studi di linguistica educativa*. Roma: Aracne.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). Italmatica: L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. In F. De Renzo & M. E. Piemontese (Eds.), *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche* (pp. 211–224). Roma: Aracne.

Franchini, E., Lemmo, A., & Sbaragli, S. (2017). Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 1*, 38–63. doi: 10.33683/ddm.17.1.3

Gualdo, R., & Telve, S. (2011). *Linguaggi specialistici dell'italiano*. Roma: Carocci.

Halliday, M. A. K. (2004). *The language of science*. Londra: Continuum.

Harmon, J. M., Hedrick, W. B., & Wood, K. D. (2005). Research on vocabulary instruction in the content areas: Implications for struggling readers. *Reading and Writing Quarterly*, *21*(3), 261–280. doi: 10.1080/10573560590949377

Laborde, C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121–135.

Lavinio, C. (2004). *Comunicazione e linguaggi disciplinari: Per un'educazione linguistica trasversale*. Roma: Carocci.

Maier, H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(1), 69–80.

Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 298–305.

Martini, B., & Sbaragli, S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Napoli: Tecnodid.

Monroe, E. E., & Panchyshyn R. (1995) Vocabulary considerations for teaching mathematics. *Childhood Education*, *72*(2), 80–83.

Pierce, M. E., & Fontaine, L. M. (2009). Designing vocabulary instruction in mathematics. *The Reading Teacher*, *63*(3), 239–243. doi:10.1598/RT.63.3.7

Powell, S. R., & Driver, M. K. (2015). The influence of mathematics vocabulary instruction embedded within addition tutoring for first-grade students with mathematics difficulty. *Learning Disability Quarterly*, *38*(4), 221–223. doi:10.1177/0731948714564574

Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and supporting children's mathematical vocabulary development. *Teaching Children Mathematics*, *9*(2), 107–112.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2017). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare.* Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being - or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37–98). Lawrence Erlbaum Associates.

Sobrero, A. (2009). L'incremento della competenza lessicale, con particolare riferimento ai linguaggi scientifici. *Italiano LinguaDue*, *1*(1), 211–225.

Van der Walt, M. (2009). Study orientation and knowledge of basic vocabulary in mathematics in the primary school. *South African Journal of Science and Technology*, *28*(4), 378–392.

Van der Walt, M. S., Maree, J. G., & Ellis, S. M. (2008). A mathematics vocabulary questionnaire for use in the intermediate phase. *South African Journal of Education*, *28*(4), 489–504.

Zini, A. (2014). Una prova di *cloze* sul lessico peculiare di un linguaggio scientifico. In A. Colombo & G. Pallotti (Eds.), *L'italiano per capire* (pp. 223–239). Roma: Aracne.

La ricerca in Didattica della Matematica: Una responsabilità dei matematici

Research in Mathematics Education: A responsibility of mathematicians

Bruno D'Amore[1,2] **e Martha Isabel Fandiño Pinilla**[2]
[1]*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*
[2]*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia*

Sunto. *In alcuni paesi rimane ancora una sorta di avversione verso la ricerca in Didattica della Matematica. Alcuni matematici non ne apprezzano il contenuto, ritenendolo più appropriato per pedagogisti o psicologi. In questo articolo, gli autori propongono alcuni esempi di ricerca che dimostrano che una seria ricerca in Didattica della Matematica deve necessariamente essere fatta da matematici.*

Parole chiave: ricerca in Didattica della Matematica, scopi della Didattica della Matematica, contenuti della Didattica della Matematica.

Abstract. *In some countries there is still a kind of aversion towards research in Mathematics Education. Some mathematicians do not appreciate its content, considering it more appropriate to pedagogists or psychologists. In this paper, the authors offer some examples of research showing that a serious research in Mathematics Education must necessarily be done by mathematicians.*

Keywords: research in Mathematics Education, aims of Mathematics Education, contents of Mathematics Education.

Resumen. *En algunos países todavía hay una especie de aversión a la investigación en Educación Matemática. Algunos matemáticos no aprecian su contenido, considerándolo más apropiado para pedagogos o psicólogos. En este artículo, los autores proponen algunos ejemplos de investigación que muestran que la investigación seria en Educación Matemática debe ser necesariamente realizada por matemáticos.*

Palabras claves: investigación en Educación Matemática, objetivos de la Educación Matemática, contenidos de la Educación Matemática.

1. Premessa

Questo articolo, più che un lavoro di ricerca, è un *pamphlet*, o un *position paper*, le cui argomentazioni sono fondate su risultati di ricerche precedenti opportunamente citate. La querelle che propone è relativamente nuova, se non altro per la trattazione strutturata nella quale si presenta, anche se il tema è oggetto frequente di discussioni informali a più livelli. L'idea che lo sorregge e che l'ha generato è legata a un tentativo di dare una risposta il più possibile definitiva, citando esempi, a una domanda spesso oggetto di discussione, se cioè la figura del matematico sia la più appropriata a fare ricerca (e più in generale attività) nel campo della Didattica della Matematica e non, piuttosto, uno studioso di settori più generalisti, come un pedagogista o uno psicologo.

In più occasioni ci è capitato di verificare che vi sono matematici docenti universitari che neppure sanno che esiste una disciplina a sé stante, che si chiama "Didattica della Matematica", dotata di dignità accademica, tanto da essere denominazione di uno specifico corso di studi o nella laurea di base in Matematica o in quella magistrale in Matematica o nel corso di laurea per la formazione di futuri docenti di scuola primaria o in corsi post laurea di formazione di futuri docenti o di docenti in servizio. Essi confondono spesso la denominazione specifica e di senso ben connotato "Didattica (della Matematica)" con il termine generico "didattica" che spesso è considerato sinonimo di "ore dedicate all'insegnamento", dunque confondono una disciplina specifica di ricerca, scientificamente ben strutturata a livello internazionale, che si basa sul lavoro assiduo di una folta schiera di ricercatori di tutti i continenti con un'attività di routine comune a tutti i docenti, cioè con un'attività lavorativa per svolgere la quale di solito si reputa sufficiente essere padroni della materia insegnata.

Forse la colpa di tutto ciò sta nella denominazione data alle origini a tale disciplina, nata ufficialmente a metà degli anni '80 del XX secolo (e dunque non ancora giunta al suo mezzo secolo di vita ufficiale). Quando i suoi creatori le diedero quel nome, Didattica della Matematica, di certo non immaginavano la confusione descritta sopra, che si sarebbe creata e protratta per decenni. Diffusa in tutti i paesi, la traduzione della sua denominazione nelle varie lingue rispecchia più o meno le stesse problematiche: Didactique des Mathématiques (denominazione originale, visto che è nata in Francia), Mathematics Education, Educación matemática, Didaktik der Mathematik, Didática da Matemática e così via.

Altri confondono questo tipo di interessi con la Pedagogia, credendo che sia più congeniale delegare a quel mondo le problematiche aventi a che fare con tutto ciò che riguarda la scuola; ma la Didattica della Matematica va considerata invece, come mostreremo in questo testo, un'attività di ricerca di stampo matematico, per fare la quale (ricerca) servono matematici professionisti formati in modo specifico.

Non in tutti i paesi del mondo questo modo di vedere è stato già definitivamente accettato e tuttavia è assai e sempre più diffuso

In Italia, per esempio, la Didattica della Matematica fa parte del raggruppamento disciplinare MAT/04 (creato dal MIUR, Ministero dell'Università e della Ricerca), dunque fa ufficialmente parte pienamente della Matematica:

- MAT/01 Logica matematica
- MAT/02 Algebra
- MAT/03 Geometria
- MAT/04 Matematiche complementari (comprende i seguenti corsi universitari: Matematiche elementari da un punto di vista superiore, Matematiche complementari, Didattica della Matematica, Storia della Matematica e altri)
- MAT/05 Analisi matematica
- MAT/06 Probabilità e Statistica
- ...

Esistono corsi di Didattica della Matematica che si possono seguire dopo aver ottenuto il titolo di laurea in Matematica: laurea magistrale in Matematica con indirizzo didattico, master in Didattica della Matematica, dottorato in Didattica della Matematica.

Ancora dibattuto è il tema della tipologia della nostra disciplina; secondo chi qui scrive, la Didattica della Matematica appartiene alla tipologia della cosiddetta Matematica applicata. [Su una breve storia della Didattica della Matematica e sull’evoluzione dell’idea di Matematica applicata, si veda D’Amore e Sbaragli (2020)].

A conferma di questo modo di intendere le cose, nel luglio del 2006 si tenne presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Torino un convegno internazionale su *La matematica e le sue applicazioni*, dunque un convegno di Matematica applicata: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. La Didattica della Matematica fu considerata come una “Matematica applicata alle problematiche dell’apprendimento” (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2007).

Gli Atti di quel *panel* furono pubblicati in un numero speciale della rivista *La matematica e la sua didattica*; l’editor fu Ferdinando Arzarello, che divenne pochi anni dopo presidente dell’ICME (International Congress on Mathematical Education) (dal 2013 al 2016). [Su una breve storia dell’ICME, il cui primo presidente fu il matematico tedesco Felix Klein, si veda ancora D’Amore e Sbaragli (2020)].

A seguito del tema di ricerca presentato in quella occasione, si realizzarono varie pubblicazioni e due dottorati di ricerca, uno in Italia e uno in Colombia.

La confusione fra Didattica della Matematica e Pedagogia è così fortemente ancora viva, che abbiamo pensato di dedicare le pagine che seguono a illustrare alcune ricerche in Didattica della Matematica per capire il senso delle quali è necessaria una competenza matematica professionale, da matematici, né da docenti di scuola né da pedagogisti. La Pedagogia è stata molto utile nelle fasi iniziali, quando per la Didattica della Matematica si sono dovute creare dal nulla basi solide scientifiche per delineare le specificità delle sue ricerche. Si è attinto ovviamente dalla Matematica, dall'Epistemologia della Matematica e dalla Storia della Matematica, ma anche dalla Pedagogia, dalla Didattica Generale, dalla Psicologia, dalla Semiotica, dalla Filosofia, dalla Linguistica … e da altre discipline per evidenziare prima e fondare poi alcuni concetti di base della Didattica della Matematica. È stato uno sforzo corale dei primi ricercatori in Didattica della Matematica, durato alcuni decenni, che, in certe direzioni e per certe discipline, ancora è in atto. Ma ora la Didattica della Matematica ha un suo status scientifico proprio; per cui troviamo ridicolo che in alcuni paesi del mondo e secondo alcuni docenti universitari, si possa sostenere la tesi che, per la formazione dei futuri insegnanti di Matematica la sequenza idonea possa essere la semplicistica seguente: prima severi e ben fondati studi di formazione in Matematica e poi studi di Pedagogia.

Mentre sul primo punto siamo pienamente d'accordo) (Fandiño Pinilla, 2011), sul secondo dissentiamo totalmente, non perché la Pedagogia non sia interessante, coinvolgente o utile, ma per due motivi:

a) tutto quel che di Pedagogia serve (teoricamente ed empiricamente) nella ricerca scientifica e nella pratica didattica quotidiana scolastica è già stato evidenziato e immesso nella Didattica della Matematica;
b) nella Didattica della Matematica c'è molto di più, c'è tutto quel che serve professionalmente a una persona esperta in Matematica (davvero esperta) a compiere le azioni professionali necessarie per far sì che i propri studenti possano apprendere la Matematica.

Si noti bene: il problema di fondo non è come-cosa-quando insegnare Matematica, ma far sì che gli studenti la apprendano.

Per cui la nostra proposta nel punto b), successivo ad a), è la seguente: un corso vero, profondo, tecnico di Didattica della Matematica, ma tenuto da chi è esperto specifico in questa disciplina, non un docente universitario qualsiasi (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).

Dunque, presenteremo di seguito alcune ricerche empiriche condotte a diversi livelli scolastici su alcuni temi che, talvolta a sorpresa, si sono rivelati di complessa gestione da parte degli studenti.

Non lo diremo espressamente punto per punto, esempio per esempio, lo diciamo qui, una volta per tutte: se l'analisi di queste difficoltà di apprendimento dovessero essere affrontate, capite e risolte da parte di un pedagogista, esperto in Pedagogia, ma non esperto in Didattica della Matematica, non ci sarebbero speranze, secondo noi, di venire a capo del problema. Solo un matematico esperto, ed esperto specificamente in Didattica della Matematica, può capire fino in fondo le motivazioni, le cause delle difficoltà dello studente e dunque, sulla base dei suoi studi specifici, tentare di trovare un rimedio per favorire l'auspicato apprendimento da parte dello studente.

Abbiamo più volte affermato che la Didattica della Matematica va considerata come una teoria scientifica di per sé, autonoma. Siccome la certificazione di “scienza” ancora oggi è data quasi sempre in modo corale ma spesso non universale, vogliamo qui esporre esplicitamente ma molto brevemente il nostro modo di vedere le cose, rinviando per approfondimenti a D’Amore (2001a, 2007).

Il termine “teoria scientifica” o “scienza” è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta, …) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione, …).

Tralasciando per brevità il percorso arcaico dell’idea di scienza, nei modi attuali di considerare una teoria scientifica si trova la nozione di “paradigma” (Thomas Kuhn); si intende con “paradigma” l’insieme delle ipotesi teoriche generali e l’insieme delle leggi per le loro applicazioni, comunemente accettate dagli appartenenti a una stessa comunità scientifica, e implicanti un sostanziale accordo nei giudizi professionali, di merito e di pertinenza. Nella formazione di una nuova comunità scientifica, c’è un momento a partire dal quale si può parlare appunto di “paradigma”; la fase che precede è caratterizzata da una disorganizzazione, priva di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa: si può dire che in questa fase vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire i punti di vista propri e altrui. I lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa. La tesi di Kuhn (1957) più famosa è quella secondo la quale il progresso scientifico procede secondo “rivoluzioni”, dato che si ha passaggio, evoluzione, solo dopo una crisi.

Un altro ben noto contributo fondamentale è quello proposto negli anni ’60 da Imre Lakatos, con l’idea di “programma di ricerca”, cioè una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve allora contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei vari problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare (Lakatos & Musgrave, 1960).

Un altro notevole contributo teorico ben noto è quello dovuto a Mario Bunge, negli anni ’80: la scienza è un corpo in costante accrescimento di conoscenze, caratterizzato dal fatto di trattare di conoscenze razionali, sistematiche, esatte, verificabili (e dunque anche fallibili). La conoscenza scientifica coincide con l’insieme delle idee su un certo argomento, stabilite in modo momentaneamente provvisorio; ma poi, il concorso dei singoli e lo scambio di informazioni e di idee dà luogo a una comunità scientifica. Quel che caratterizza la differenza tra campi di credenza (religioni, ideologie, politiche, ...) e campi di ricerca scientifica è il tipo di modalità secondo le quali avvengono i "cambi" nelle idee; nei primi, i cambi avvengono a causa di "rivelazioni", controversie, pressioni sociali; nei secondi c'è un cambio continuo a causa degli stessi risultati della ricerca (Bunge, 1985).

Secondo richieste più "deboli", una teoria scientifica si definisce oggi tale quando dispone di un oggetto specifico di studio, di un suo proprio metodo di ricerca e di un suo specifico linguaggio condiviso; a questa richiesta fanno spesso riferimento i teorici delle scienze umane, per chiamare "scienze" appunto, tali domini di studio. Questa richiesta "debole" ha fatto proliferare negli ultimi anni l'appellativo di "scienze" dato a molte discipline. Infatti, qualsiasi disciplina allo sviluppo della quale concorrano studiosi che si riconoscano e si accettino reciprocamente come esperti in essa, fondando una comunità di pratiche condivise, che facciano uso dello stesso linguaggio, prima o poi acquisisce proprio le caratteristiche appena descritte. Il problema della ripetibilità degli esperimenti, della corretta definizione delle variabili in gioco, del senso che acquistano termini come "rigoroso", "vero" ecc., tende a svanire o a subire profonde modifiche.

Naturalmente non possiamo non porre alla base delle precedenti riflessioni il lavoro pionieristico di Karl Popper, sia perché riteniamo di poterlo/doverlo considerare il padre fondatore di tutte le nuove interpretazioni teoriche successive al suo lavoro, sia per la forte influenza che la sua speculazione ha avuto anche in campi assai diversi, godendo di un'immensa popolarità (ci limitiamo a citare Popper, 1934).

Quel che c'è di comune in tutte queste interpretazioni è che le teorie scientifiche non possono essere creazioni o invenzioni di un singolo, ma deve esserci una comunità di persone tra le quali vige un sostanziale accordo sia sui problemi significativi della ricerca, sia sulle modalità nelle quali essa si esplica, sia sul linguaggio usato. In questa direzione, Thomas Albert Romberg, alla fine degli anni '80 (Romberg, 1988), per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile, affermava che:

- deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole, ci devono essere problematiche centrali che guidano il lavoro dei ricercatori e che siano condivise;
- le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
- il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comuni, sui quali il gruppo è d'accordo;
- il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile; per esempio la funzione dei referee negli usuali sistemi di

accettazione degli articoli su una rivista seria e la disposizione positiva degli autori a intervenire sulle loro raccomandazioni o richieste di modifica.

Tra le scienze così intese, ben rientrano le didattiche disciplinari e in particolare la Didattica della Matematica. È infatti sotto gli occhi di tutti l’esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori in Didattica della Matematica che hanno interessi comuni, per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise, che danno (da vari decenni) spiegazioni di carattere causale, che hanno elaborato un vocabolario comune, condiviso; essi hanno convegni specifici e loro riviste specifiche, all’interno dei quali le proposte di comunicazione o di pubblicazione vengono vagliate in base a procedimenti oramai ampiamente condivisi. Siamo dunque in pieno nelle condizioni proposte da Romberg per poter affermare che la Didattica della Matematica ha tutte le caratteristiche per poter essere considerata una scienza consolidata e stabile.

E veniamo allora, di seguito, a una successione di esempi che abbiamo scelto come paradigmatici per, come abbiamo già annunciato, cercare di mostrare come sia necessario che a svolgere ricerca in Didattica della Matematica siano dedicati matematici esperti e non altro genere di studiosi.

2. Il limite, uno dei concetti chiave della matematica – uno degli ostacoli più comuni e diffusi nell’apprendimento della matematica

Crediamo che a tutti noi, docenti universitari di Matematica, sia capitato almeno una volta nella vita di dover spiegare a giovani studenti l’idea di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a un certo x_0; e ciò capita a tutti i docenti di scuola secondaria di II grado, quando gli studenti hanno fra i 16 e i 18 anni.

Il traguardo è spiegare e far apprendere, con tutti i dettagli del caso, la seguente definizione, considerata sufficientemente corretta dal punto di vista formale:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad\leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Ci dice l’esperienza e ci dicono i colleghi di scuola secondaria che tale formula è impossibile da far accettare, capire, far propria da parte degli studenti (il caso positivo è definito “assai raro”); cosicché si scende di livello formale e si propone una spiegazione a parole della formula precedente, di solito, più o meno, una cosa del genere seguente che altro non è se non la traduzione della formula precedente in parole più o meno ordinarie del linguaggio comune:

ℓ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se per ogni numero reale $\varepsilon>0$

esiste un altro numero reale positivo δ tale che, se $0<|x-x_0|<\delta$, allora $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Se per caso si ha ancora fallimento (colleghi di scuola secondaria ci dicono che il miglioramento di comprensione è di circa lo 0%), si prosegue proponendo un'altra traduzione in un linguaggio ancora più vicino a quello che abbiamo già definito "comune":

Sia data una funzione $f:\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ e un punto di accumulazione x_0 di X. Un numero reale ℓ è il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 se, fissato arbitrariamente un valore ε della distanza tra $f(x)$ e ℓ, si riesce a trovare, in corrispondenza di questo, un valore δ della distanza tra x e x_0 per il quale per tutti gli x, escluso x_0, che distano da x_0 meno di δ, si ha che $f(x)$ dista da ℓ meno di ε.

Spiegazioni sempre più vicine al linguaggio ordinario perdono (un po' di) rigore, ma avvicinano almeno un sottoinsieme non vuoto di studenti della classe alla comprensione; e poi esempi concreti, grafici, disegni opportuni, esercizi aiutano ancora di più. (Sugli aspetti di Storia della Matematica connessi con l'evoluzione del concetto di limite, si veda D'Amore e Sbaragli, 2020).

E tuttavia, tutti gli studi del settore confermano che la comprensione e l'apprendimento (sono due cose ben diverse) sono piuttosto rare; lo studente può anche apprendere a risolvere esercizi (si tratta di ripetere in modalità opportune formalismi e algoritmi) e questo tranquillizza il docente, ma la reale comprensione dell'oggetto matematico in questione è sempre piuttosto rara.

Una spiegazione del fenomeno richiederebbe ora una lunga dissertazione su un tema di Didattica della Matematica ideato da Guy Brousseau, la cosiddetta "teoria degli ostacoli epistemologici"; ma sulla spiegazione tecnica del fenomeno non entriamo in dettagli, rinviando semmai a D'Amore (1999). Ci basta far sapere all'eventuale lettore matematico non esperto in Didattica della Matematica che si riescono a dare oggi, grazie alla ricerca, spiegazioni scientifiche che stanno alla base dei fallimenti apprenditivi. (Non si tratta necessariamente di mancanza di cultura pregressa, scarsa intelligenza o cattiva disponibilità, come taluni ingenuamente credono).

Su questo imbarazzante insuccesso così internazionalmente diffuso hanno lavorato vari ricercatori (matematici impegnati nella ricerca in Didattica della Matematica), è un tema considerato classico. Noi ci limitiamo a ricordare i lavori di David Tall che mette in evidenza una difficoltà più generale di carattere epistemologico, sulla quale non entriamo in dettagli e che ci limitiamo ad accennare. Nella definizione abbiamo la presenza contemporanea di due tipologie di infinito in perenne contrasto fra loro, l'infinito attuale e l'infinito potenziale: "punto di accumulazione" è infinito attuale, "tendente a" è infinito potenziale (Tall & Vinner, 1981). Si veda anche Bagni (2001).

Ora, gli studi più generali su tale tema sono assai coltivati e diffusi; per esempio, i seguenti sono altri esempi di ostacoli relativi all'apprendimento dell'infinito:[1]

- confusione fra termini considerati da molti equisignificanti all' "apeiron" greco, cioè i seguenti: illimitato, indefinito, infinito, tra loro erroneamente equiparati;
- l'infinito come numero naturale *grande*.

Lunghe e dettagliate ricerche hanno portato a rivelare due convinzioni che sono radicate nello studente anche maturo (e anche in taluni docenti):

- *appiattimento*: tutte le cardinalità infinite sono uguali; cioè: tutti gli insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro;
- *dipendenza*: la cardinalità dipende dall'estensione geometrica; per esempio, ci sono più punti in un segmento "lungo" piuttosto che in uno "corto".

Si possono vedere le ricerche di Arrigo e D'Amore (1998, 1999, 2002, 2004).

Questi studi hanno spinto i ricercatori a confezionare lavori più didatticamente concreti, destinati agli insegnanti più che a colleghi ricercatori, cioè facendo uso dei risultati delle ricerche per produrre materiali di riflessione che possano aiutare gli insegnanti nel loro lavoro quotidiano; si veda, per esempio: Arrigo, D'Amore e Sbaragli (2020).

Che la questione sia talvolta fuori della portata cognitiva non solo degli studenti, ma anche culturale di alcuni docenti, è documentato da un'altra ricerca (D'Amore et al., 2004) nella quale si analizzano le frasi usate dai docenti in aula su questi temi, paragonandole a quelle pronunciate dagli studenti, intervistati separatamente.

E da quel che due celebri autori scrivono a pagina 7 di un libro di testo scolastico italiano destinato agli studenti di scuola secondaria di II grado: "Un insieme si dice infinito quando contiene infiniti elementi".[2]

Da tutto ciò risulta ovvio che siamo di fronte a un grave problema di carattere matematico, prima che apprenditivo.

Per quanto riguarda la frase relativa agli insiemi infiniti di pagina 7 del famoso libro di testo, abbiamo sempre sperato che fosse una scelta consapevole deliberata ma non dichiarata degli autori, per costringere gli insegnanti a parlare con i propri studenti del problema della definizione classica euclidea (per genere prossimo e differenza specifica), per spiegare i termini *definiendum* e *definiens* … Ma forse ci illudiamo, forse è davvero uno scivolone.

---

[1] Noi ci limitiamo a citare come problematica allo stesso tempo epistemologica e didattica (come spesso accade) l'infinito, ma di grande rilevanza su entrambi i fronti è il problema della continuità, sul quale qui sorvoliamo.

[2] È per noi sorprendente che qualcuno adotti un simile libro di testo per i propri studenti.

Si noti come, per parlare, anche solo scherzosamente, di Didattica della Matematica bisogna sapersi orientare non solo in Matematica, ma anche nella sua storia e nella sua epistemologia. Su questi argomenti si veda D'Amore e Sbaragli (2017).

Il che ci riporta daccapo: per capire la problematica celata nel mancato apprendimento di questo genere di temi, occorre la competenza di chi questi temi conosce in modo profondo, e non di chi è esperto in generici problemi di mancato apprendimento o di realtà scolastica o di questioni pedagogiche, interessanti ma generiche. Non solo il ricercatore in questo campo deve essere competente in Matematica, come potrebbe esserlo, come spesso lo è, un docente di scuola secondaria di II grado; deve essere qualcuno che quotidianamente ha a che fare professionalmente con la Matematica, che sia un ricercatore in Matematica, per il quale la Matematica sia parte attiva nella sua vita, che non si limiti cioè ad averla studiata, ma che la frequenti in modo profondo, che l'abbia fatta propria, che l'abbia almeno in certe occasioni creata. Dunque, un matematico vero, non un esperto in altre discipline, prestato occasionalmente alla Matematica.

Resta da definire che cosa noi intendiamo per "matematico"; ma abbiamo la fortuna di possedere già una proposta di definizione data da un gigante della Matematica, Jean Dieudonné (1987, cap. 1): un matematico è "quelqu'un qui a publié au moins la démonstration d'un théorème non trivial".

Prendiamo per ora questa, per buona, ma poi dovremo aggiungere quei matematici che lavorano in Matematica applicata (e dunque non dimostrano teoremi), e dunque anche i matematici didatti, che Dieudonné non poteva prendere in considerazione per motivi cronologici.

3. Una ricerca sulla comprensione della dimostrazione di un teorema di Cantor: La somma di competenze su specifici argomenti non garantisce la competenza su argomenti che sono la somma di quelli

Quando ci avviciniamo alla storia della matematica, una delle questioni che più sorprendono e appassionano è il contenuto di una celebre e straordinaria lettera di Georg Cantor a Richard Dedekind, inviata da Halle il 29 di giugno del 1877.

Dato che Dedekind ritardava a dar risposta a un problema che gli aveva proposto il 25 di giugno, Cantor, dopo soli 4 giorni, e chiedendo scusa della propria ansia, propone con forza, nella lettera del 29 giugno, una nuova domanda, dichiarando di aver la necessità di ricevere l'opinione di Dedekind.

Quasi all'inizio di questa nuova lettera (scritta in tedesco), Cantor scrive (in francese) la famosa frase: "Fintanto che voi non l'approviate, io non posso che dire: lo vedo ma non lo credo" (Arrigo & D'Amore, 1992; Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2020; D'Amore & Sbaragli, 2020).

Per conoscere i testi completi delle lettere scambiate fra i due formidabili matematici tedeschi, si possono vedere: Noether e Cavaillés (1937) e Cavaillés (1962).

Sorge spontanea la domanda seguente: qual era l'argomento sul quale Cantor sollecitava una rapida risposta da parte di Dedekind? Ce lo dice lo stesso Cantor nella sua lettera del 25 di giugno del 1877:

> Una varietà continua a p dimensioni, con $p>1$, si può mettere in relazione univoca con una varietà di dimensione uno, in modo tale che a un punto dell'una corrisponda uno e un sol punto dell'altra?

[In quell'epoca per "relazione univoca" si intendeva quel che oggi chiamiamo "corrispondenza biunivoca"].

Ci possiamo concentrare sul seguente caso, più semplice ma ugualmente significativo, come spesso si fa in divulgazione (Courant & Robbins, 1941):

> È possibile trovare una corrispondenza biunivoca fra i punti di un quadrato e i punti di un segmento? (Per esempio, di un lato del quadrato stesso?)

Per "quadrato" intendiamo, d'ora in poi, una superficie piana di forma quadrata *aperta,* cioè senza bordo, senza frontiera. D'ora in poi chiameremo "segmento" un segmento aperto, cioè senza estremi.

Si può intuire l'importanza della domanda a partire dal seguente commento dello stesso Cantor:

> La maggior parte di coloro ai quali ho posto questa domanda si sono sorpresi molto del fatto stesso ch'io la ponessi, dato che è evidente che, per la determinazione di un punto su una estensione di p dimensioni, si necessita sempre di p coordinate indipendenti.

Nel seguito della lettera, Cantor confessa a Dedekind che aveva cercato di dimostrare questa impossibilità, dando per scontato che fosse vera, ma solo perché non era soddisfatto della supposta e così diffusa evidenza!

Confessa dunque di aver sempre fatto parte di coloro che non ponevano in dubbio questa impossibilità della corrispondenza biunivoca; … *sempre*, fino a che dimostrò che le cose *non* stanno affatto così …

La dimostrazione trovata da Cantor è di una semplicità geniale; per conoscerla, basta consultare un buon libro di Analisi, per esempio Bourbaki (1970, pp. 47–49).

Noi ci ispiriamo in quanto segue a una celebre volgarizzazione della dimostrazione di Cantor che si trova in Courant e Robbins (1941) relativa all'esempio visto sopra: quadrato/lato.

Poniamo il quadrato su un sistema di assi cartesiano ortogonale monometrico di origine O, in modo tale che due lati consecutivi siano "appoggiati" sugli assi (ovviamente uno dei vertici coincide allora con l'origine). Considerando il lato del quadrato come unità di misura, si ha che ogni punto P interno alla superficie quadrata ha coordinate reali x_p e y_p del tipo $0 < x_p < 1$, $0 < y_p < 1$, dunque, esplicitamente: $x_p = 0{,}a_1a_2 \dots a_n \dots$, $y_p = 0{,}b_1b_2 \dots b_n \dots$ A ogni *coppia ordinata di numeri reali* $(x_p\,; y_p)$ si faccia corrispondere *il numero reale* $x_{p'}$ così definito: $x_{p'} = 0{,}a_1b_1a_2b_2 \dots a_nb_n \dots$, ottenuto preponendo 0 e la virgola, e alternando poi le singole cifre decimali di ciascuna coordinata. Si può facilmente constatare che $0 < x_{p'} < 1$ e come tale $x_{p'}$ è definito in modo univoco a partire da x_p e y_p; e come $x_{p'}$ si possa considerare come coordinata ascissa di un punto P' sull'asse *x* $[P'(x_{P'}\,; 0)]$, pensabile dunque come *il* corrispondente di P nella corrispondenza definita.

Viceversa: si può partire da P' e dalla sua coordinata ascissa e, con un banale metodo inverso di distribuzione delle cifre (quelle di posto dispari a costruire il valore dell'ascissa x_p e quelle di posto pari a costruire il valore dell'ordinata y_p), risalire univocamente a P.

Dunque, questo teorema di Cantor è provato da noi, almeno nel caso in cui la dimensione p della varietà è 2: ai punti interni del quadrato unitario corrispondono in modo biunivoco i punti interni del segmento unitario.
[Si noti che la dimostrazione è basata sulla scrittura formale dei numeri reali; ma, come sappiamo, questa non è univoca perché, per esempio, $2{,}6\overline{9}$ e 2,7, pur essendo due scritture diverse, rappresentano lo stesso numero. Per rimediare a questo inconveniente, basta vietare una delle due scritture; per esempio vietiamo la scrittura con il 9 periodico].

La nostra ricerca ha motivazioni puramente didattiche e i paragrafi precedenti semplicemente inseriscono la situazione nell'ambito storico.

Abbiamo voluto ricordare quanto precede solo per giustificare il titolo che abbiamo dato alla ricerca: "Lo vedo, ma non lo credo", la celebre frase di Cantor, che rende tanto umana tutta la storia di questa dimostrazione.

Questa frase è emblematica di quel che affermavano anche gli studenti da noi sottoposti alla ricerca al finale del loro iter nella scuola secondaria superiore (in Italia e Svizzera: fra 17 e 19 anni), posti di fronte alla dimostrazione data da Courant e Robbins, e illustrata da noi. Argomenti di base necessari per la dimostrazione:

- assi cartesiani ortogonali monometrici
- coppia ordinata $(x_p\,; y_p)$ di numeri reali come coordinate di un punto P
- numeri reali x_p
- scrittura formale $0 < x_p < 1$.

Succede un fatto curioso e interessante:

- anche se lo studente dimostra di conoscere piuttosto bene questi argomenti di base, NON capisce la dimostrazione (nella misura dell'85–90%) che si basa su questi elementi, su queste conoscenze.

Questa rilevazione inattesa apre un nuovo filone di ricerca. Quasi tutti noi docenti siamo convinti che se un apprendente conosce gli argomenti considerati di base, A_1, A_2, …, A_n relativi a un tema nuovo T, allora ciò garantisce che si possa procedere con l'introduzione di T. Ma non sempre le cose vanno così lisce. Quante volte ci è successo di restare stupiti di questo fatto. Come stabilire esattamente quali argomenti di base A_i siano necessari per apprendere T?

Ora, dopo questa esperienza, ci sembra ragionevole pensare che non si tratta solo di una "somma" di conoscenze, ma di qualcosa di più, vorremmo chiamarla: articolazione delle conoscenze. E inoltre sono necessarie competenze trasversali, per esempio spesso di tipo logico, che un docente può dare per scontate… Dimostrazioni per assurdo, deduzioni parziali, riconoscere ipotesi e tesi, …

Serve un matematico per capire tutto ciò, non basta una conoscenza di base acquisita solo con lo studio, servono pratica ed esperienza nel trattare con oggetti della matematica, molti, mescolati fra loro, allo stesso tempo.

4. La dimostrazione *nyaya* in aula

Per parlare di questa ricerca è necessaria una breve premessa teorica di storia della Logica e più precisamente di una logica che noi occidentali consideriamo non standard, non classica. Ma che, a sorpresa, si è rivelata in più classi di scuole italiane, in modo spontaneo. Il che ci ha molto fatto riflettere.

La scuola indù *nyaya* ($^{-}$II sec. – VII sec.) affermava l'egemonia di quattro "mezzi di conoscenza" (*pramana*):

- la testimonianza
- l'analogia
- la percezione
- l'inferenza

che vengono brevemente esaminati qui di seguito.

La testimonianza (*sabda*) comprende tutto ciò che di scritto o di tramandato oralmente è degno di fede. Ne fanno parte le preghiere, la rivelazione di Dio, la storia tramandata, i poemi sacri.

L'analogia (*upamana*; c'è chi la traduce in italiano "comparazione" e chi "equivalenza") è la forma di ragionamento che porta a una definizione dell'oggetto dovuta alla somiglianza con altri. Si noti che l'analogia *nyaya* classifica gli oggetti in categorie o classi di analoghi, distinguendo due classi tra loro in base al fatto che non contengono termini analoghi. Ora, dato che l'analogia tra oggetti esistenti è dovuta a considerazioni relative all'oggetto (e quindi non astratte, ma classificatorie e sperimentali), questa forma di conoscenza non può non richiamare alla nostra attenzione alcune delle concezioni attuali, anche in matematica. Si pensi in geometria alle definizioni per genere prossimo e differenza specifica o le definizioni cosiddette analitiche che individuano classi per mezzo di un passaggio al quoziente, dunque in base a una relazione di equivalenza.

La percezione (*pratyaska*) è la relazione tra l'oggetto visibile (ciò che cade sotto gli occhi) o comunque sensibile (relazione prodotta dal contatto di un organo di senso con l'oggetto) e la nostra immagine di esso. Tralasciamo considerazioni relative ai sei sensi che i filosofi *nyaya* riconoscevano all'uomo, per ricordare l'importanza che attribuivano al sesto senso, l'intelletto (*manas*), a causa della funzione ordinatrice e mediatrice che questo "organo" ha, rispetto agli altri cinque.

Ricordiamo che i concetti comunicabili acquistano una loro realtà, nella filosofia *nyaya*, in contrapposizione alla pura immagine mentale che attribuivano loro i buddisti.

E arriviamo all'inferenza (*anumana*) che rappresenta, nella scuola *nyaya*, il momento sublime.

Non è molto conosciuto il *sillogismo nyaya* (lo chiamiamo così per via della sua forma simile, per certi versi, almeno all'apparenza, a quello aristotelico). La *nyaya* distingueva nel suo sillogismo cinque elementi assertivi (e non tre, come nel sillogismo aristotelico):

- l'asserzione (*pratijna*) (non dimostrata; enunciazione di quel che si vuole dimostrare, quel che sarebbe, nelle nostre logiche classiche, la tesi)
- la ragione (*hetu*)
- la proposizione generale o enunciato (*udaharana*), seguita da un esempio (di solito un esempio concreto, tratto da esperienze di vita reale)
- l'applicazione (*upanaya*), detta anche seconda asserzione
- la conclusione (*nigamana*).

Il seguente esempio è un classico *nyaya*:

1. l'oggetto A si muove (asserzione, tesi)
2. perché gli è stata applicata una forza (ragione)
3. ogni volta che si applica una forza a un oggetto, esso si muove (proposizione generale);
   per esempio: se si attaccano buoi a un carro, esso si muove (esempio)
4. all'oggetto A è stata applicata una forza (applicazione)
   dunque:
5. l'oggetto A si muove (conclusione).

È abbastanza facile mettere in forma simbolica moderna questo ragionamento, ma non lo facciamo, rinviando gli interessati a D'Amore (2005).

La critica buddista classica rifiuta i momenti primo e secondo, dato che essi non fanno parte del ragionamento vero e proprio, ma sono inglobabili in una tesi. Diciamo ciò per evidenziare che questa apparentemente inutile perdita di tempo si fa spesso nel ragionare comune, per esempio nell’azione didattica: si mette cioè in vista fin dall’inizio quanto si vuol arrivare a dimostrare; diversamente non si organizzerebbe proprio *quel* ragionamento. Su questo punto dovremo tornare più avanti.

A torto, invece, i buddisti rifiutavano il quinto momento, nel quale si compie una sorta di *modus ponens* allargato al calcolo dei predicati, un’operazione logicamente corretta ed essenziale al funzionamento di quel tipo di sillogismo.

L’analisi logica della lingua, in relazione alla stretta connessione attribuita alla dicotomia linguaggio-pensato, porta la *nyaya* a definire un’esatta critica del linguaggio che rasenta sistemi moderni. Nemici del corretto dedurre o del parlare sono, per i *nyaya*:

- l’ambiguità (*chala*) che si realizza ogni volta che un termine viene usato a sproposito (in sostanza, si tratta di un cattivo uso dell’analogia);
- l’inconclusione (*jati*), discorso circolare senza contenuto;
- gli argomenti assurdi (*nigrahastama*) cui ricorre chi non ha logica; il destino di costui è d’essere dialetticamente sconfitto da chi opera con logica e con argomentazioni razionali.

I filosofi *nyaya* studiarono poi i casi in cui i loro sillogismi portavano a sofismi; ecco i casi principali di questa deleteria riduzione:

- inesatta rispondenza tra le varie parti costituenti il sillogismo, per cui non c’è relazione tra i termini;
- assurdo intrinseco che appare in un termine che afferma il contrario di ciò che vorrebbe asserire;
- assurdo esplicito dovuto alla contrapposizione di due termini del sillogismo che si escludono a vicenda;
- la mancanza di una dimostrazione o verifica di uno dei termini su cui poggia il ragionamento;
- la falsità del termine maggiore o l’inesistenza dell’oggetto in questione o l’attribuzione di false proprietà a esso. [Su questo punto, si ricordi la posizione di Aristotele nei confronti dell’insieme vuoto e il superamento della questione da parte di Gergonne (D’Amore, 2001b)].

Da qui si vede bene come la *nyaya* sia diversa dalla logica aristotelica dato che si basa essenzialmente sulla verifica empirica, sul contatto con il mondo esterno, intendendo per mondo non solo l’insieme delle cose e dei fatti ma pure dei pensati, come fossero entità reali (“reali” non semplicemente “esistenti”, per non credere che si possa fare un paragone con il platonismo).

[Il contatto con il mondo esterno non solo non era contemplato, ma del tutto inviso alla filosofia greca trionfante (Socrate – Platone - Aristotele) che, su questo punto, in modo più o meno esplicito, proseguiva nel ripudiare la *doxa* a favore della scelta parmenidea della *aletheia*. Naturalmente, discorso a parte meriterebbero i tentativi dei Sofisti che, però, furono soggiogati dal trionfo di Aristotele e dalle (precedenti) argomentazioni dialogiche di Platone].

Bisogna qui ricordare che la nostra attuale distinzione tra logica degli enunciati e logica dei predicati non rende giustizia allo sviluppo storico effettivo della disciplina; la logica degli enunciati non è così potentemente presente nell'opera di Aristotele come lo è oggi in qualsiasi testo: essa deriva dagli studi dei filosofi Megarici e Stoici e, paradossalmente, si è affermata più tardi, mentre la logica dei predicati è essenziale per capire, da un punto di vista moderno, la sillogistica di Aristotele.

In aula, nelle lezioni di Logica nella scuola secondaria di II grado, si tratta soprattutto la logica degli enunciati e si tenta di applicarla, come esempio, alle dimostrazioni geometriche alle quali non sempre e non del tutto essa è adatta. Per esempio, nelle dimostrazioni occorre spesso quantificare su variabili, cosa che non ha senso nella logica enunciativa.

Un'analisi molto approfondita sui modi di ragionamento e sulle loro modellizzazioni logiche da parte di esperti (matematici, docenti universitari) e da parte di studenti (universitari, ai primi anni) è quella condotta da Durand-Guerrier e Arsac (2003). Gli Autori mostrano, tra l'altro, concezioni diverse dell'uso e della necessità d'uso dei quantificatori nelle dimostrazioni da parte degli esperti e da parte degli studenti.

Arriviamo al punto.

Molti studenti del primo biennio della scuola secondaria di II grado italiana (14-16 anni) che dimostrano teoremi (meglio: che hanno il compito di dimostrare teoremi) lo fanno spontaneamente seguendo inconsapevolmente la forma dimostrativa *nyaya*. Il fatto di aver studiato la logica classica di stile aristotelico non aiuta per nulla o quasi nello sviluppo delle abilità nella dimostrazione.

Questa esperienza di ricerca, determinata dal caso, ma poi condotta con curiosità e rigore, è dettagliatamente narrata in D'Amore (2005); a quel testo rimandiamo chi volesse avere precise notizie su come la cosa si è inaspettatamente rivelata e sui dettagli successivi, relativi alla ricerca.

Qui, più che tutto ciò, interessa il discorso specifico di questo nostro scritto attuale: chi avrebbe mai potuto riconoscere quel che stava succedendo in aula? L'esasperato tentativo di far uso della tesi in partenza, contrariamente a quel che desiderava-auspicava-suggeriva il docente (secondo il quale la tesi deve apparire solo alla fine, come la logica aristotelica vuole), il desiderio di far ricorso, a metà processo, di esempi opportuni (ritenuto non opportuno dal docente che voleva un ragionamento puramente logico e non legato a fatti specifici) e altri aspetti che ora non sottolineiamo, hanno rivelato che i precedenti mesi di sforzo didattico, tutto teso a far apprendere a quegli studenti la logica aristotelica standard, non ha avuto successo applicativo al momento di produrre dimostrazioni. D'altra pare, la maggior parte del tempo è stata dedicata a far apprendere meccanismi di tipo semantico, legati cioè alle cosiddette tavole di verità dei connettivi, il che, sappiamo bene, in realtà non aiuta affatto nelle dimostrazioni e costituisce un apprendimento a parte, spesso inutile o addirittura dannoso (D’Amore, 1991).[3]

Dunque, quegli studenti avevano appreso la semantica del calcolo enunciativo, qualche vaga nozione di calcolo dei predicati del I ordine, ma non avevano idea di come applicare tutto ciò al processo dimostrativo.

In questo tentativo, spontaneamente, passavano, senza ovviamente saperlo, alla *nyaya*; il docente non capiva quel che stava succedendo e lo interpretava come un insuccesso apprenditivo.

Chi, studiando questa ricerca e i suoi risvolti, può davvero capire quel che sta succedendo in quelle aule? Solo chi ha avuto occasione professionalmente di studiare la storia della Logica e, in particolare, di curiosare fra le logiche antiche, per esempio la *nyaya* indiana.

Non certo un esperto di sistemi scolastici e di difficoltà generiche di apprendimento o cose simili.

5. Relazioni per lo più inattese fra area e perimetro

I due concetti geometrici: “perimetro” e “area di una figura piana” hanno molti elementi in comune sul piano scientifico, però molti altri sono semplicemente supposti sul piano delle “misconcezioni”, comuni fra gli studenti (e non solo) di ogni livello scolastico (D’Amore & Sbaragli, 2005). Per esempio, la letteratura ha dimostrato ampiamente che un gran numero di studenti (e non solo) è convinto che esista una relazione di stretta dipendenza fra questi due concetti dal punto di vista relazionale, del tipo seguente.

Siano A e B due poligoni:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due poligoni isoperimetrici sono necessariamente equiestesi)
- e viceversa, scambiando l’ordine “perimetro-area” con “area-perimetro”.

Raramente questo tema si propone didatticamente in forma esplicita (secondo vari docenti da noi intervistati, per una supposta difficoltà).

Ci siamo chiesti se i docenti, di qualsiasi livello scolare, hanno piena coscienza su questo tema o se, per caso, anche nelle concezioni di alcuni di essi esistono problemi di costruzione concettuale. E così abbiamo dedicato attenzione e studi al problema (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2005; Fandiño

[3] Non abbiamo mai conosciuto un giovane studente di scuola secondaria di II grado che avesse davvero inteso il senso dell’implicazione materiale, anche se ne conosceva a memoria la tavola di verità.

Pinilla & D’Amore, 2009).

Cominciamo con il notare che questa questione ha a che vedere con il problema assai più generale delle convinzioni e delle concezioni dei docenti, in relazione alla Matematica. Un ampio quadro teorico su questo tema si può trovare in D’Amore e Fandiño Pinilla (2004).

Gioca inoltre un altro fattore importante, evidenziato da Azhari (1998); lo diciamo in forma succinta:

Se esiste una coppia di relazioni che lega mutualmente due classi di oggetti, K1 e K2, lo studente cerca di applicare la seguente “legge di conservazione”: Se un oggetto di K1 subisce una variazione, anche quello della classe K2 in relazione con K1 lo fa (e viceversa).

L’esempio che lega tra loro perimetri e aree di poligoni cade a proposito per quanto concerne questa idea di Azhari; di più, questo è precisamente uno degli esempi che offrono Stavy e Tirosh (2001), esaminando il lavoro di Azhari.

Allora, se mettiamo in relazione i perimetri di due figure piane A e B con le rispettive aree, una forma convincente di evidenziare che la “legge” annunciata poco fa NON è valida, ci sembra quella di dare un esempio per ciascuno dei seguenti casi possibili:

Perimetro	Area	Perimetro	Area	Perimetro	Area
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La prima casella > > dice: “Trovare due poligoni tali che, passando dal primo al secondo, il perimetro cresca e anche l’area cresca”; e così successivamente, analogamente.

Per evitare difficoltà, si chiede sempre di partire da poligoni semplici, per esempio un rettangolo, quando ciò è possibile, facendo diverse trasformazioni di qualsiasi tipo su questo poligono o su poligoni che derivino da questo.

Riteniamo necessario che i poligoni sui quali conviene lavorare siano i più semplici possibili per evitate complicazioni che derivano dalla gestione della figura stessa.

Tra poco daremo un esempio per ciascuno dei 9 casi indicati, con poligoni estremamente elementari. Questi esempi non furono mostrati inizialmente ai soggetti implicati nella prova, che descriveremo di seguito; ogni soggetto doveva proporre propri esempi ritenuti opportuni, per lo meno all’inizio.

Domande, metodologia di ricerca e ipotesi di risposte sono date con estrema meticolosità in D’Amore e Fandiño Pinilla (2005) e Fandiño Pinilla e D’Amore (2009). In forma molto succinta:

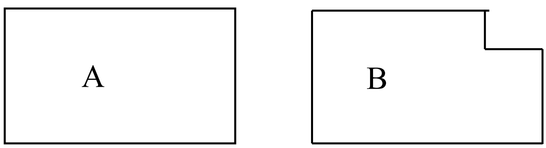
- Soggetti della ricerca:
    - ricercatori

- docenti di tutti i livelli
- futuri docenti in formazione (titolo minimo richiesto: laurea in matematica);

➢ Domande iniziali:
- È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti i 9 casi?
- È vero o non è vero che sorge spontaneo pensare che, in generale, se aumenta il perimetro di un poligono aumenta anche la sua area?
- È vero o non è vero che si deve fare uno sforzo per convincersi che le cose NON stanno così?

La ricerca è durata molto a lungo soprattutto perché la metodologia è stata molto elaborata; per brevità riportiamo solo alcune note.

Nel momento esploratorio iniziale, perfino alcuni colleghi docenti universitari hanno espresso perplessità sul fatto che si potessero trovare esempi per tutti e 9 i casi. Ma, appena visto il primo esempio significativo da noi proposto (caso 6):

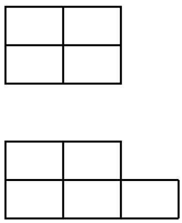
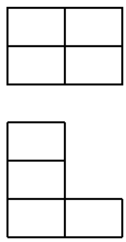
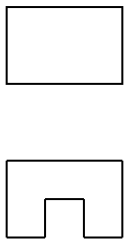
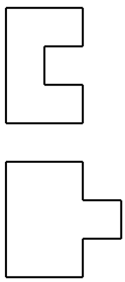
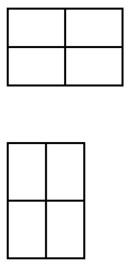
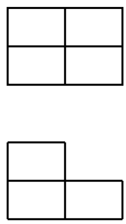
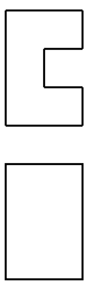
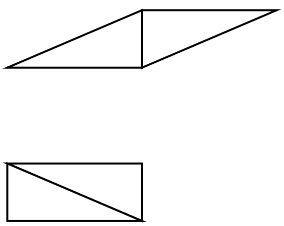
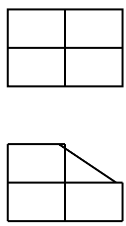


nel quale l’esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra, dunque con diminuzione dell’area, lasciando inalterato il perimetro (caso: = <), hanno immediatamente capito di che cosa si trattava, senza più alcun imbarazzo in nessuno dei casi. Molti hanno commentato che, all’inizio, avevano pensato di *dover* usare omotetie, sebbene nella proposta di lavoro non fosse stato affatto usato questo termine.

Alcuni insegnanti di scuola dei primi livelli scolastici hanno contestato il fatto che si potessero trasformare le figure in questo modo; alcuni hanno ammesso che fanno fatica concettuale ad ammettere la figura precedente B nel novero delle “figure della geometria” perché non ha un suo nome proprio; alla nostra proposta di chiamarla “esagono”, molti si sono rifiutati.

Non commentiamo i risultati della ricerca relativa agli allievi, perché passa in secondo piano; d’altra parte, molte delle risposte degli allievi ricalcano le convinzioni dei propri insegnanti, per esempio soprattutto la non accettazione di alcune figure fra le “figure della geometria” o fra le “figure geometriche” perché non sono quelle standard stereotipate incontrate nella pratica didattica o sui libri di testo. Riportiamo di seguito la risoluzione proposta da noi a docenti e allievi di tutti e 9 i casi possibili.

Perimetro	Area	Perimetro	Area	Perimetro	Area
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

1 	2 	3 
4 	5 	6 
7 	8 	9 

Una volta compreso, grazie ai nostri primi esempi (1-2-3), il senso del problema, i docenti coinvolti nella ricerca hanno saputo trovare gli altri (dal 4 al 9) con maggiore o minore destrezza e rapidità; le maggiori difficoltà si sono avute nei casi 4, 5 e 6.

Abbiamo poi eseguito prove meno stringenti sul piano formale di ricerca, chiedendo a vari altri docenti universitari non matematici di trovare esempi, con risultati per lo più nulli.

Come sempre, concludiamo con le solite considerazioni.

Per quanto la tematica trattata fosse questa volta di livello minimo dal punto di vista dei contenuti matematici, i risultati mostrano che l’analisi di essi non può che essere fatta da un matematico sia perché si richiede il completo dominio del tema in questione, sia per la duttilità propria del matematico professionista nel trattare la coerenza fra domanda posta e risultato ottenuto.

Può essere curioso e interessante chiamare in causa qui un problema che possiamo considerare antesignano di questo e che risale addirittura a Galileo Galilei. Nel capolavoro *Dialogo intorno a due nuove scienze*, *attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, nella prima giornata del dialogo (Galilei, 1638) si trova enunciata la seguente affermazione di Sagredo, uno dei tre interlocutori protagonisti del dialogo:

> (…) ignorando che può essere un recinto eguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello: il che accade non solamente tra le superfici irregolari, ma [anche] tra le regolari, delle quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di ugual circuito; di che mi ricordo averne con gusto particolare veduta la dimostrazione studiando la Sfera del Sacrobosco con un dottissimo commentario sopra. (Galilei, 1638, p. 629)

Galilei si riferisce all’opera *De sphaera* (ca. 1230) di John of Holywood (1195 ca. – 1256), matematico e cosmografo inglese, noto con lo pseudonimo di Sacrobosco; si tratta di un testo di astronomia popolare, un antesignano della divulgazione scientifica di grande pregio. Il Sacrobosco fu traduttore di ottimo livello di opere matematiche antiche e strenuo difensore del valore della matematica araba che la Chiesa ha più volte tentato di affossare.

Il fisico-letterato Galilei ci offre, in un italiano mirabile già moderno, due interessanti riflessioni matematiche.

- Nella prima afferma che non vi sono relazioni necessarie tra area e perimetro. Possiamo forzare un po’ la mano a Galilei e proporre un “problema delle piazze del paese” che riafferma in modo più esplicito e problematico la sua frase: “Un paese ha due piazze A e B; il perimetro della piazza A è maggiore del perimetro della piazza B; quale delle due piazze ha area maggiore?”.

Ovviamente una risposta non c’è, ma molti interpellati (e in stragrande maggioranza) rispondono “A”, per una falsa relazione che ritengono necessaria: maggiore perimetro $\rightarrow$ maggiore area. (Richiamiamo Azhari, 1998). Galilei è decisamente sarcastico nei confronti di coloro, colti e ignoranti, scienziati o artisti, che tendono a rispondere A. La reazione di Galilei è significativa ma i risultati delle nostre ricerche in Didattica della Matematica mostrano che ben poco è cambiato dopo quasi cinque secoli.

Moltissimi degli specifici intervistati, tutti docenti di Matematica, decisamente la stragrande maggioranza, 40 su 43, anche laureati, anche insegnanti di scuola secondaria di II grado, affermano dapprincipio spontaneamente che ha area maggiore la piazza che ha perimetro maggiore, salvo poi:

- correggersi, affermando che “non è detto”, ancor prima di effettuare tutte le prove previste nell’intervista (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti di Matematica della scuola secondaria di II grado)

oppure

- accettare che la propria risposta fosse criticabile e scorretta, ma solo dopo aver eseguito le prove (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti dei primi livelli scolastici).

Dunque, il *cambio di convinzione* è palese, a volte forte, e in parecchi casi richiede prove e riflessione non banali.

- Nella seconda riflessione/secondo problema sempre della prima giornata, Galilei afferma che, tra tutte le figure piane di ugual lunghezza del contorno, il cerchio è quello di area massima; in altri termini si tratta di stabilire qual è tra tutte le figure piane isoperimetriche quella di area massima.

L’analisi di questo argomento permette di fare esempi a scopo didattico interessanti, per esempio facendo riferimento al mitico famoso incontro fra Didone e Iarba, alla base della mitica fondazione di Cartagine (${}^{-}814$) (D’Amore & Sbaragli, 2017).

Il terzo problema sembra distante dai due precedenti, ma non lo è per nulla; Galilei lo esprime in termini di due tele rettangolari per confezionare sacchi destinati a contenere merci; se tali tele vengono arrotolate a formare sacchi lungo le due diverse dimensioni, i due sacchi così ottenuti conterranno la stessa quantità di patate o quantità diverse? Noi lo esporremo in termini più moderni; si chiede dunque se una persona di cultura possa rispondere correttamente alla seguente domanda: supponiamo di arrotolare due fogli di carta di formato A4 (dunque identici), uno lungo un lato e l’altro lungo l’altro lato, a formare due cilindri (che hanno evidentemente la stessa area laterale); tali due cilindri avranno uguale volume o volumi diversi?

La prima risposta spontanea data da tutti gli studenti, da molti docenti e da tutti gli intervistati di cultura non specificamente matematica è che sì, i due cilindri hanno lo stesso volume. Solo calcoli (banali) o considerazioni opportune mostrano che le cose non stanno affatto così.

L’intuizione spesso sa essere subdola …

6. Disegna un rettangolo …

Fin dalle prime ricerche in Didattica della Matematica, si è rivelato di un certo interesse occuparsi anche di studenti molto giovani, di scuola primaria. La Matematica trattata in quel segmento scolare è certamente di livello scientifico non elevato, ma è la base di tutte le costruzioni cognitive e intellettuali successive. Si dà come accertato ed evidente che, nella storia individuale culturale di un individuo, difficilmente un disamore o una incomprensione nei riguardi della Matematica venga superata negli anni successivi; si constata, e sono soprattutto sociologi, psicologi e pedagogisti a farlo, che il disamore, la disaffezione, lo scarso interesse, i risultati negativi proseguono, fino a sfociare spesso in avversione, spesso nella scuola secondaria. Costoro, di fronte a Matematica di livello più elevato, non saranno più disponibili all'impegno e all'apprendimento nella e della Matematica.

Perfino Guy Brousseau, il geniale pioniere della Didattica della Matematica, ha dedicato la stragrande maggioranza dei suoi studi e delle sue ricerche alla scuola primaria.

Come abbiamo detto in precedenza, all'inizio della sua storia, la Didattica della Matematica ha dovuto fare i conti con l'esistente, giungendo a includere quel che serve alla Didattica traendolo dalle altre discipline, per esempio Psicologia e Pedagogia.

Per esempio, all'inizio degli anni '80 del XX sec., nelle ricerche psicologico-pedagogiche di Ackermann-Valladolao relative a un generico tema "risoluzione dei problemi" (di Matematica, nella scuola primaria), si dà grande importanza non solo alle consegne di tipo strettamente matematico, ma anche a quelle più generali legate ad attività al contorno e relative al modo di comportarsi, alle situazioni ammesse, come e dove eseguire eventuali disegni, ... (Ackermann-Valladolao et al., 1983). Questo, che potremmo chiamare *contesto esterno*, ha un ruolo importante nella scelta del modello adeguato da parte dello studente. Sono considerazioni non certo di tipo matematico, ma di carattere psicologico e comportamentale che potrebbero sfuggire all'occhio di un matematico o di un ricercatore matematico o di un docente di Matematica. E tuttavia bisogna riconoscere che hanno un certo peso nel processo concreto in aula e potrebbero influire negativamente nella determinazione di attività e di conseguenza dell'apprendimento, condizionando profondamente la propensione all'impegno e dunque all'apprendimento. La macchina umana pensante è molto complessa.

Vari didatti della Matematica dei primi anni della ricerca, cercando ispirazione per la loro azione, studiarono questo tipo di ricerche, trovando interessanti spiegazioni di quel che accade nelle aule nelle ore di Matematica, a tutti i livelli scolastici (D'Amore, 1999).

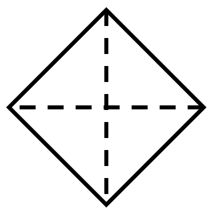
Un bell'esempio dell'analisi e dell'applicazione della tesi di Ackermann-Valladolao si ha in alcuni lavori di Elisa Gallo e di suoi collaboratori a Torino (Gallo, Amoretti, & Testa, 1989; Gallo, Testa, & Amoretti, 1989; Gallo & Testa, 1991; Gallo, 1992a, b; Gallo, Ferrari, & Speranza, 1995).

Questo tipo di ricerche sul comportamento degli studenti di fronte a compiti di Matematica a prima vista semplicissimi è stato condotto a più riprese anche da noi e in diverse direzioni. Per cui, pur riconoscendo la priorità degli studi citati, noi riportiamo la specificità della nostra esperienza.

Ripetiamo, per il lettore matematico: il compito matematico sottoposto agli studenti è di una semplicità teorica e tecnica sconcertante e proprio per questo attira la nostra attenzione il netto insuccesso dovuto all'enorme quantità di risposte sbagliate, in tutta la scuola secondaria di II grado, da parte di moltissimi insegnanti di scuola primaria, nei corsi universitari nei quali la Matematica è presente come disciplina di servizio, non come disciplina principale.

In D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli (2019) si presenta uno studio basato su analisi e intuizioni contenute in Gallo (1985).

Durante una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria in Italia si è presentata la seguente situazione. Dopo aver mostrato dei fogli quadrati di carta nei quali si erano evidenziate le pieghe in corrispondenza delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio modello di quadrato nella seguente "inaspettata" posizione rispetto a quella "classica" scelta dai bambini per parlare di quadrato.



A questa provocazione i bambini hanno obiettato: "Quello che hai in mano tu non è mica un quadrato, è un rombo. Quello che abbiamo in mano noi è un quadrato". (I bambini tenevano il quadrato disposto nel modo stereotipato classico, con due lati paralleli al pavimento).

Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: "Perché quello che ho in mano io è un rombo e il vostro è un quadrato?".

Bambini: "Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique".

Nella logica di ciò che era stato loro insegnato e che essi avevano appreso, i bambini avevano ragione: la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione su una particolare posizione assunta dall'oggetto e non sulle proprietà intrinseche dell'oggetto in sé. Tale posizione risultava intuitiva per gli allievi, essendo percettivamente immediata, ma celava le caratteristiche matematiche del concetto.

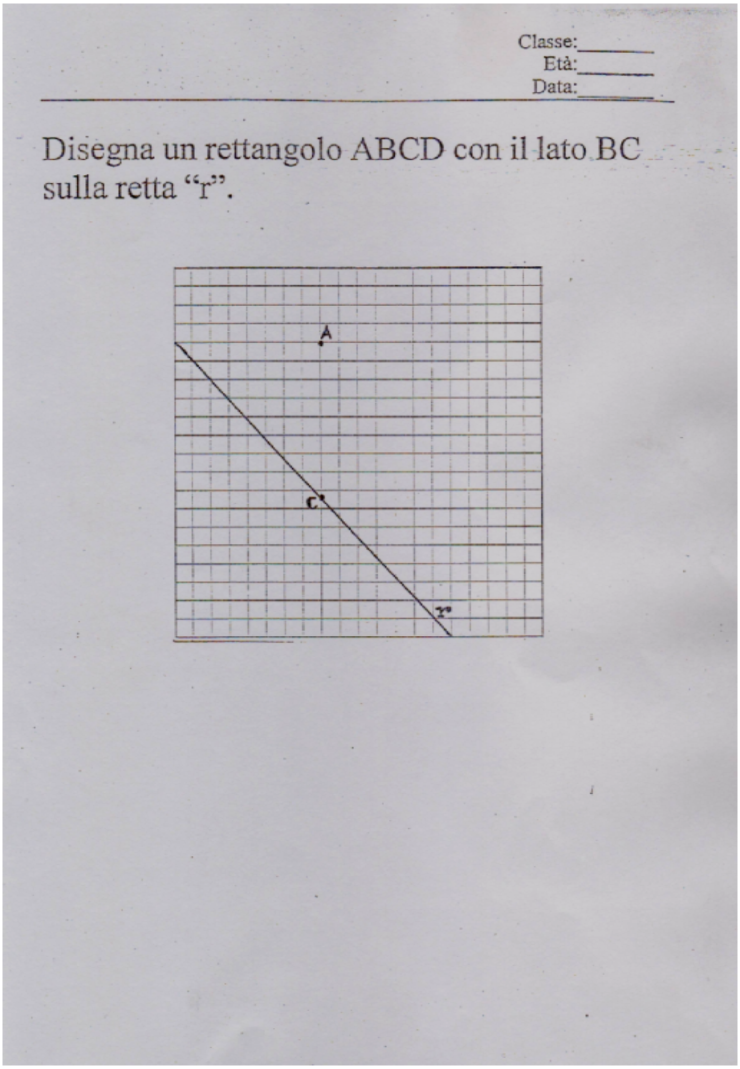
Oggetti della Matematica, come lati o diagonali, vengono rappresentati secondo certe modalità che nulla hanno anche fare con la Matematica, ma con la realtà empirica; una diagonale, dunque una retta, oggetto geometrico astratto, a rigore non si può pensare come parallela a un pavimento o a una parete, c’è un contrasto descrittivo legato alla realtà empirica che cozza con la idealità dell’oggetto geometrico. I riferimenti relazionali ideali astratti (parallelo, perpendicolare, orizzontale, verticale eccetera) hanno senso solo se riferiti a suoi analoghi oggetti ideali e non a fattori esterni concreti, della realtà empirica.

Ma forse pretendere questo nel corso di un insegnamento di scuola primaria è pretendere troppo; però così nascono storture notevoli. E poi, torniamo a segnalare, gli stessi docenti di primaria non si rendono conto di ciò, colpevolizzando gli innocenti bambini; i ragazzi di scuola secondaria continueranno a ragionare così, lo stesso all’università. Gli stessi insegnanti di scuola primaria, nella maggioranza dei casi, ritengono di aver agito in modo matematicamente corretto.

Le misconcezioni rilevate in questo caso sembrano dipendere da due diverse cause: la ripetitività della rappresentazione proposta dall’insegnante (che consiste nel quadrato obbligatoriamente disegnato con i lati orizzontali e verticali rispetto al punto di vista del lettore e che viene proposto in generale in modo quasi esclusivo) e soprattutto l’*istituzionalizzazione* verbale di tale scelta.

Dicevamo che si potrebbe guardare a tutto ciò con benevolenza adulta, sorridendo, pensando che si tratta di bambini di 9-10 anni; ma il problema che noi abbiamo rilevato è che la stessa situazione identica si presenta nella scuola secondaria di II grado e all’università, con le stesse identiche repliche da parte degli studenti oramai adulti. E la cosa diventa interessante anche per un matematico e non più e non solo per uno psicologo o per un pedagogista … Specie nel caso dell’esperienza che segue che abbiamo ripetuto in Italia e all’estero in diverse occasioni, sia con studenti delle scuole secondarie di II grado (o analoghe), in università e in corsi per la formazione di docenti di scuola primaria.

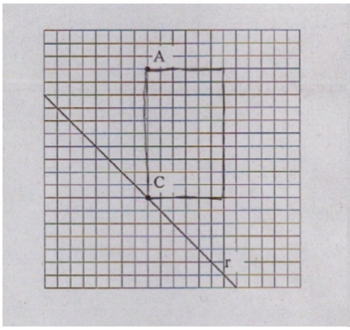
A ciascun soggetto sottoposto alla prova si consegnava un foglio A4 come il seguente.

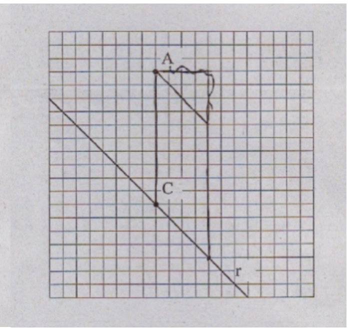


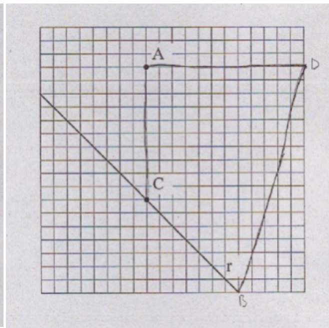
Può sembrare sorprendente che la realizzazione del disegno del rettangolo richiesto presenta una difficoltà estrema, ed è per questo che proponiamo sempre ai colleghi docenti increduli di provare nelle loro classi. I casi di mancata risoluzione corretta del test sono in una percentuale enorme.

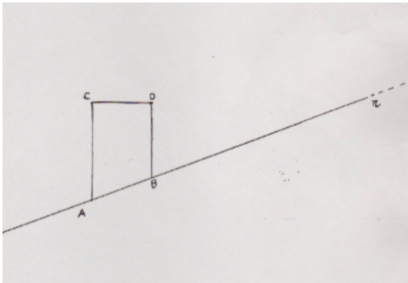
Non è solo un problema di immagine stereotipata del rettangolo (come nel caso precedente di quadrato-rombo). Si tratta proprio della quasi impossibilità di visualizzare la vera essenza del rettangolo, il concetto figurale di rettangolo (Fischbein, 1963; Fischbein & Vergnaud, 1992). [Efraim Fischbein è un altro psicologo ai cui studi noi didatti della Matematica matematici abbiamo attinto molto].

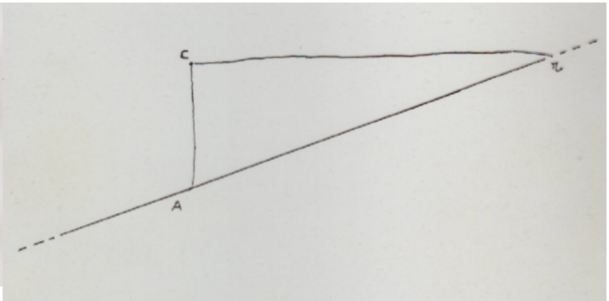
Proponiamo di seguito alcuni dei risultati ottenuti, a mo' di esempio. Si noti che, negli anni, abbiamo provato in varie e diverse modalità: carta a quadretti, carta bianca, maggior o minor inclinazione della retta *r* in un verso o in un altro. [Abbiamo reso anonime le prove, cancellando i nomi degli autori coinvolti nella prova].

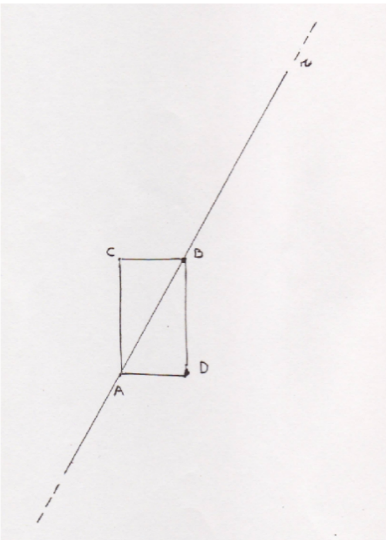










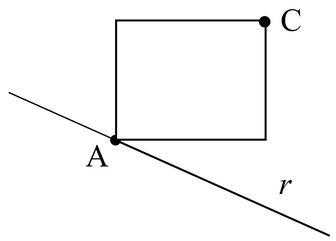


Saper visualizzare un testo, cioè saper passare da un testo contenente una consegna scritta a una rappresentazione grafica con esso coerente non è una capacità spontanea, va educata gradualmente, cominciando il più presto possibile e con tutti i mezzi possibili. E non solo usando software geometrico, ma anche matita e strumenti concreti da disegno. [Varie prove analoghe anche relative a disegni bidimensionali che rappresentano prospettive impossibili di inesistenti oggetti geometrici si trovano in D'Amore e Duval (2019)].

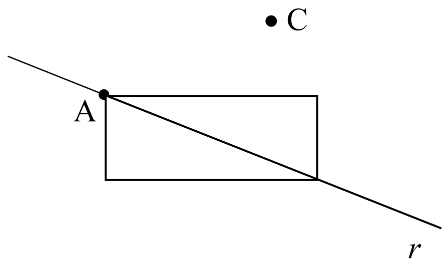
C'è poi anche un problema relativo alla comprensione dei testi scritti nel caso della Matematica, da parte degli studenti. Più precisamente, il testo della consegna citato poco sopra dovrebbe essere visto come costituito dalle seguenti componenti elementari:

- disegna il (un) rettangolo
- chiamalo ABCD
- il lato AB deve stare sulla retta *r*;
  questa consegna non sempre è ben capita e qualche volta è ulteriormente spezzata in due componenti:
  - un lato deve stare sulla retta *r*
  - quel lato si deve chiamare AB.

Di fronte alle richieste multiple, qualche comportamento erroneo risulta spiegato se si accetta che il soggetto esegua solo il *primo* compito, ignorando gli altri. Ecco allora che si spiega perché emerge il modello standard:



che abbiamo riscontrato assai diffuso, insieme al seguente:



e altri.

Ci faceva piacere far conoscere ai nostri lettori matematici anche ricerche di questo genere che coinvolgono temi matematici di basso profilo scientifico, per far capire che cosa significa che noi didatti della Matematica matematici abbiamo dovuto fare i conti, confrontarci, con discipline come Pedagogia, Didattica generale, Psicologia e altre, che per prime avevano iniziato a esplorare questi atteggiamenti da parte degli studenti.

È vero che il livello matematico qui coinvolto è minimo, ma proprio per questo pare assurdo che la percentuale di studenti (e non solo) che non sanno come rispondere a queste domande è talmente alta che dobbiamo prenderla in esame, non possiamo far finta di nulla. E solo un matematico esperto in Didattica capisce il senso profondo, non solo tecnico, di questa situazione che, per molti motivi, risulta essere imbarazzante.

7. Il contributo di alcuni libri di testo a creare confusione

Il Lettore ricorderà che in 1. abbiamo fatto riferimento a un (famoso e diffuso) libro di testo di Matematica per la scuola secondaria di II grado nel quale si dà una definizione di insieme infinito in maniera alquanto … bizzarra, usando come *definiens* il *definiendum*.

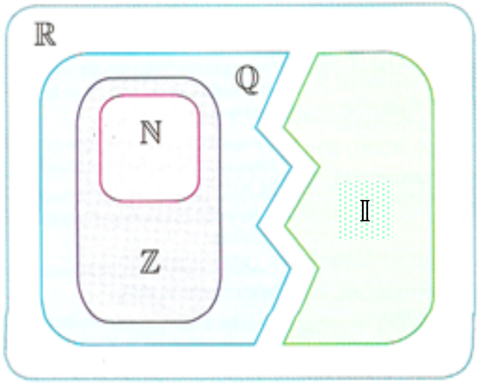
Non è l’unico caso di libro di testo contenente brani discutibili sul piano formale, ma solo un matematico se ne accorge; lo affermiamo perché abbiamo sottoposto alcune pagine, formule, grafici, disegni, definizioni a colleghi docenti di scuola secondaria per vedere se anch’essi ravvisassero le stesse storpiature, errori, incertezze, incongruenze che rivelavamo noi. Ma capita che pochi intervistati se ne rendano conto. Eppure la maggior parte sono laureati in Matematica.

Se dunque si decide di compiere analisi critiche sui libri di testo, non possiamo chiederlo né a docenti attivi (che sono poi gli stessi che tali libri scrivono o per lo meno che li adottano), né tantomeno a colleghi universitari che non siano matematici. Per ovvii motivi. Ma non è possibile che i colleghi matematici docenti universitari non si rendano conto dell’estremo interesse che c’è in tutto ciò. Per ottenere un perché motivato e significativo, è necessario impostare una vera e propria ricerca.

Ecco alcuni altri esempi, fra i tantissimi disponibili, scelti del tutto a caso. Come sempre, non citeremo le fonti.

Testo universitario di Matematica, ma per corsi di laurea diversi da quello in Matematica

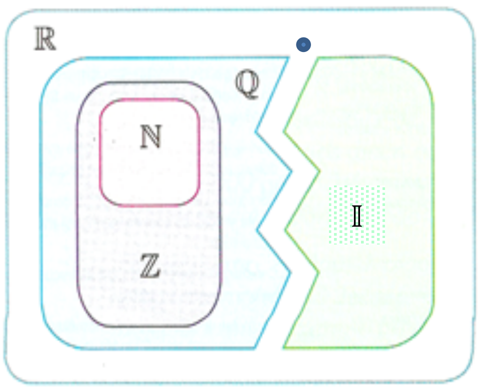
Al termine di una lunga spiegazione su che cosa debba intendersi con i simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ (irrazionali) ed $\mathbb{R}$, l’autore afferma che $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$ e rappresenta quanto affermato per iscritto con il seguente schema grafico.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Noi abbiamo chiesto il parere sulla correttezza di questo grafico e sulla sua aderenza a quanto rappresentato simbolicamente e formalmente, ottenendo solo assensi e qualche incertezza.

Abbiamo allora indicato con un punto un oggetto dell'insieme $\mathbb{R}$ che non fosse, nello schema (si veda il successivo schema), né in $\mathbb{Q}$ né in $\mathbb{I}$, chiedendo che cosa rappresentasse.



Le risposte sono state le più varie: un numero reale (né razionale, né irrazionale?), un numero imaginario (nell'insieme $\mathbb{R}$?) e varie altre. La forza di affermare che, di fronte a questa nostra richiesta, potesse emergere che il grafico è sbagliato o che non funziona, che non rappresenta quel che si vorrebbe rappresentasse, non appare (se non dopo attente considerazioni).

Un matematico se ne rende conto subito, un docente di Matematica non matematico no. Per lo meno, non sempre e non subito.

Spesso, poi, nonostante la nostra spiegazione, la reazione era di incredulità, come se si stesse cavillando o scherzando; molti intervistati non capivano nemmeno perché noi ritenessimo sbagliato il grafico-schema, neppure dopo la nostra spiegazione (Becerra Galindo, 2020a, b).

Scuola secondaria di I grado: le frazioni

Crediamo che nessun matematico professionista (a meno che non abbia aiutato i propri figli nel disbrigo di pratiche matematiche in primaria e in secondaria di I grado) sappia che è enormemente diffusa, nelle scuole italiane, la dizione: frazione propria, impropria e apparente. Si tratta di una partizione dell’insieme delle frazioni F (assolute) intese come numeri razionali assoluti (dunque privi di segni), cioè $\frac{n}{d}$ con $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Siccome siamo certi che la maggior parte dei matematici professionisti non sappia di che cosa si tratta, diamo un rapido cenno.

Consideriamo l’insieme F delle frazioni assolute; esso può essere suddiviso in due insiemi FP (*frazioni proprie*) e FI (*frazioni improprie*) tali che:

- $\mathrm{FP} \subset \mathrm{F}$ sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ con $n < d$;
- $\mathrm{FI} \subset \mathrm{F}$ sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ con $n \geq d$.

Ovviamente: $\mathrm{FP} \neq \emptyset$, $\mathrm{FI} \neq \emptyset$, $\mathrm{FP} \cup \mathrm{FI} = \mathrm{F}$, $\mathrm{FP} \cap \mathrm{FI} = \emptyset$. Come sottoinsieme delle frazioni improprie FI, si può definire l’insieme FA (*frazioni apparenti*) ($\mathrm{FA} \neq \emptyset$) tali che:

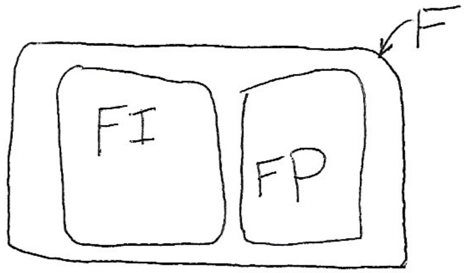
- $\mathrm{FA} \subset \mathrm{FI}$ sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ quando n è un multiplo di d, cioè si può trovare un numero naturale k tale che $n = kd$ (per $k \in \mathbb{N}$).

Siccome però moltissimi autori e docenti considerano che il contrario di $n < d$ non sia $n \geq d$ (come dovrebbe essere) ma $n > d$, allora nasce tutto un pasticcio e, spesso, la tripartizione proposta in aula e sui libri non funziona.

Per esempio, se $n = 0$, e dunque si può pensare n come multiplo di d (per $k = 0$), ne risulta la frazione $\frac{n}{d} = 0$, che nessuno sa più dove collocare …

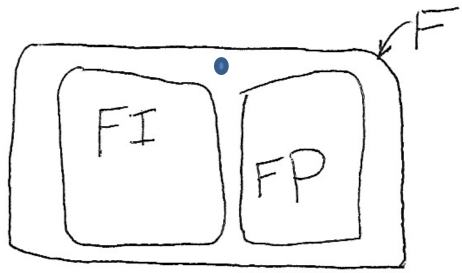
Le situazioni di dubbia definizione che si presentano sono talmente tante, che noi ci fermiamo qui.

Ecco come un docente di scuola secondaria di primo grado ha rappresentano graficamente la ripartizione dell’insieme F delle frazioni in proprie e improprie.



Sta bene il fatto che FI ⊂ F, che FP ⊂ F, che FI∩FP = ∅; ma, come nel caso del grafico precedente relativo ai numeri razionali e irrazionali, non risulta, come dovrebbe essere, che FI∪FP sia F, dato che esiste una specie di cornice il cui senso logico-semiotico è sfuggente.

Analogamente al caso precedente, abbiamo proposto al docente di dire che tipo di frazione fosse quella rappresentata dal punto che noi abbiamo disegnato sul grafico.



Siamo rimasti sconcertati quando il docente ci ha detto che si tratta di una frazione apparente, dato che non è né propria né impropria.

Evitiamo ogni commento e terminiamo questo tema confessando che suggeriamo sempre ai docenti di lasciar perdere questa inutile trattazione sulla tipologia delle frazioni, dato che matematicamente non è né utile né rilevante, e nulla aggiunge alla loro comprensione. Anzi, sembra produrre solo problemi.

Sempre a proposito delle frazioni, può essere interessante sapere che un'analisi della produzione matematica di Leonardo da Vinci mostra che il grande genio toscano del Rinascimento si trovava a mal partito con questo tema, arrivando a commettere errori davvero inaspettati (Bagni & D'Amore, 2006). Ma c'è una considerazione speciale sul rovescio del foglio 10 del Codice L che attira la nostra attenzione critica.

Codice L, pagina 10 v

Leonardo deve calcolare $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$; sa che, secondo le regole, si dovrebbe eseguire $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$ e ottenere $\frac{8}{9}$ e dunque lo esegue; ma poi critica e rifiuta il risultato: “Questo è falso imperrocché 8/9 è più di 2/3”. Il rifiuto è di facile comprensione: se si divide A per B e si ottiene C, questo C deve essere minore di A, altrimenti che razza di *divisione* è? Cioè: che razza di partizione è?

Questo modello ingenuo della divisione funziona fra numeri naturali, ma certamente non fra razionali, pertanto non si adatta alle frazioni …

A questo punto Leonardo inventa un altro algoritmo per la divisione che, ovviamente, non funziona.

Può essere interessante sapere che questo tipo di misconcezione (e cioè che sempre, in una divisione $a:b$ il quoziente *c deve essere minore di a*, sempre, indipendentemente dal campo numerico nel quale si opera), è molto diffusa, e non solo fra gli studenti dei bassi livelli di scolarità. Ma anche presso studenti del primo anno di un corso universitario (corsi di Matematica, ma non del corso di laurea in Matematica).

Va anche detto che nessuno degli studenti da noi intervistati e quasi nessuno dei molti docenti di Matematica da noi intervistati ha saputo dare una spiegazione logica sensata o formale del fatto che, per eseguire la divisione fra due frazioni $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ $(b\neq 0 \text{ e } d\neq 0)$, si può effettuare la moltiplicazione $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ $(c\neq 0)$. Per tutti è una “regola”, “si fa così”, “*basta* fare così”, ma nessuno sa spiegare un perché. Il che si traduce, dal punto di vista didattico, in una trattazione inaccettabile che prevede che in Matematica ci sono questioni che non si spiegano, che si devono eseguire in un certo modo, ma nessuno sa il perché.

[Per una trattazione matematica approfondita del tema “frazioni”, ma destinata alla didattica, frutto di parecchi anni di ricerca matematica e didattica empirica, si veda: Fandiño Pinilla, 2021].

[Segnaliamo anche il fatto che in Fischbein (1985) si evidenziano già parecchie di queste questioni, aventi a che fare con le operazioni aritmetiche elementari in genere, ma con la divisione in particolare. Come matematici, consideriamo notevole il fatto che il volume nel quale appare l’articolo di Fischbein, del lontano 1985, è stato pubblicato con contributo dell’Unione Matematica Italiana, grande esempio di lungimiranza (Chini Artusi, 1985)].

Atteggiamenti di questo genere, che possono irritare o divertire un matematico professionista, sono molto molto presenti nella pratica didattica, non solo pre-universitaria, per esempio nella (mancata) spiegazione di come si possa trasformare un numero periodico in una frazione.

Quasi tutti i docenti interessati (a parte gli universitari) hanno contestato la nostra affermazione secondo la quale $7{,}4\overline{9} = 7{,}5$ (e, ancor più, che $0{,}\overline{9} = 1$).

Ma il lettore, collega docente universitario matematico professionista, ha già capito il senso della cosa e non procediamo oltre.

Noi però poniamo con insistenza l'usuale domanda. Per intervenire in modo efficace su tutto ciò, per fare ricerca seria, anche empirica, per decidere come organizzare la formazione matematica dei futuri docenti di Matematica, non è evidente che serve la competenza, la cultura, la quotidianità con la Matematica di un matematico professionista? Davvero si pensa di lasciare lo studio di queste situazioni a pedagogisti o psicologici o improvvisati "esperti" di Didattica della Matematica che non siano matematici?

8. Due situazioni ironiche

Non siamo sicuri che il lettore matematico abbia apprezzato il fatto che, anche su temi estremamente elementari di Matematica, abbiamo mostrato che solo un matematico professionista possa capire eventuali problemi di carattere didattico. Ci è servito ciò solo per sfatare il mito che il matematico professionista che decide di occuparsi di Didattica della Matematica debba solo aver a che fare con temi molto tecnici e formali, lasciando quelli di contenuto più "elementare" ad altri studiosi, anche se non matematici. Crediamo-riteniamo-speriamo di aver mostrato (di-mostrato sarebbe pretendere troppo!) che così non è.

Ci soffermiamo ancora su due ulteriori esempi di livello estremamente elementare che ci sono occorsi, ancora una volta tesi a rafforzare la nostra opinione.

Entrambi sono incredibili, lo sappiamo; e uno dei due rasenta il ridicolo, ma ci pare molto significativo per intendere quel che succede nella mente di uno studente quando apprende la Matematica in modo stereotipato, come spesso accade.

0 è l'elemento neutro della sottrazione in N?

"$e \in \mathbb{N}$ è elemento neutro dell'addizione in $\mathbb{N}$ se $\forall n \in \mathbb{N},\ n + e = n$". (Letto sugli appunti di uno studente di scuola secondaria di II grado, dunque sotto dettatura del docente o copiando dalla lavagna). Dunque, 0 è l'elemento neutro di + in $\mathbb{N}$.

Ma allora, così definita l'idea di elemento neutro, 0 è anche elemento neutro della sottrazione in $\mathbb{N}$ … Infatti: $\forall n \in \mathbb{N},\ n - 0 = n$.

Il fatto è che nella prima definizione manca una parte dell'enunciato:

$e \in \mathbb{N}$ è elemento neutro dell'addizione in $\mathbb{N}$ se: $\forall n \in \mathbb{N},\ n + e = n = e + n$.

Applicando alla sottrazione:

$e \in \mathbb{N}$ è elemento neutro della sottrazione in $\mathbb{N}$ se: $\forall n \in \mathbb{N},\ n - e = n = e - n$.

In tal caso è facile rendersi conto che la sottrazione NON ha elemento neutro; basta un banale controesempio: $5-0=5\neq 0-5$.

[Naturalmente tutta la precedente argomentazione dipende dal fatto se si sappia già oppure no che l'addizione è commutativa, cosa che generalmente si afferma prima dell'esistenza dell'elemento neutro. Diverso è il dare una definizione generale di elemento neutro per un'operazione per la quale non si afferma nulla riguardo alla commutatività: ovviamente in tal caso occorre richiedere la condizione in entrambi i sensi].

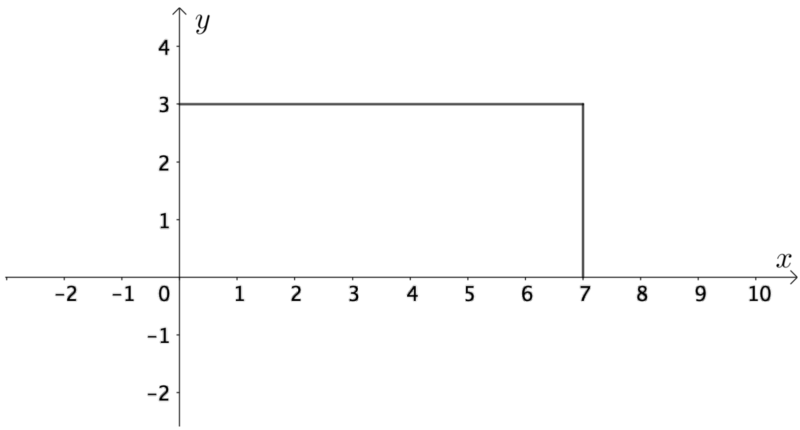
[Ci sarebbe poi da mostrare che l'elemento neutro *e* dell'addizione in $\mathbb{N}$ è unico, ma non esageriamo …].

Se perfino alcuni docenti laureati in Matematica sbagliano su questo tema e non si rendono conto delle conseguenze del loro errore, come possiamo pensare che sia un non matematico a darsi conto di ciò per entrare in dettaglio e trovare una soluzione?

L'integrale di una funzione costante

A uno studente di fine scuola secondaria superiore, valutato con altissimi voti, abbiamo proposto il seguente esercizio sugli integrali.

Calcolare l'area del rettangolo rappresentato qui di seguito usando l'integrale.

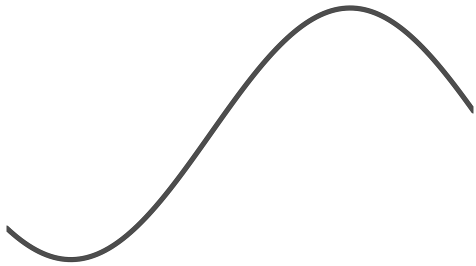


L'equazione della retta che passa per il punto (0; 3) parallela all'asse delle ascisse è $y = 3$; dunque la risoluzione dell'esercizio è:

$$\int_0^7 3\,dx = 3\cdot[x]_0^7 = 3\cdot(7-0) = 21$$

com'era evidente già con una sola occhiata.

Grande la perplessità dello studente e nostra nel cercare di capire l'origine della sua! Fino a che non sbotta, infastidito: "Non si può fare, la funzione deve essere fatta così" e disegna quanto segue.



Se uno lo pensa bene, in tutti i libri di Analisi elementare, che in altri contesti si chiama Calcolo, quando si introduce l'idea di integrale, sempre la funzione $y = f(x)$ si presenta con un andamento variabile, mai rettilineo.

Quel che si vuol intendere con quell'andamento che vorrebbe essere casuale e non specifico è la generalità dell'andamento stesso; quel che lo studente intuisce, invece, è che *non può* essere rettilineo; mai un docente di scuola secondaria pensa a questi pseudo apprendimenti che si formano spontaneamente e che noi chiamiamo misconcezioni (D'Amore & Sbaragli, 2005). Misconcezioni che solo un matematico può capire. Infatti, nonostante siamo a un livello matematico minimo tecnico e formale, nessun altro potrebbe capire il senso, il funzionamento logico delle scelte eseguite, né il fraintendimento del povero studente …

Lo studio delle misconcezioni nell'apprendimento della Matematica è di necessità appannaggio dei matematici, di quei matematici che si dedicano alla ricerca scientifica in Didattica della Matematica.

9. Non è cambiando il curricolo (o il programma) che si risolve il problema

Negli anni '70 in tutto il mondo ci si affannò a cambiare i curricola nazionali di Matematica, iniziando con gli USA; ma poi questo fatto riguardò tutte le nazioni. Fu il momento della nascita della famigerata *New Mathematics* (in Italia *Matematica moderna*) o denominazioni analoghe, dominata dall'inserimento della teoria cosiddetta "ingenua" degli insiemi al posto della Matematica scolastica tradizionale, fin dalla scuola primaria. (La storia di questo movimento si può trovare, per esempio, in D'Amore, 2021). Erano gli anni del trionfo strutturale dei bourbakisti, ma un conto è cercare di creare un linguaggio matematico comune a tutta la Matematica, ben altro è imporlo nel mondo della scuola.

Non furono i matematici i docenti di scuola, né i pedagogisti, né gli psicologi a frenare questo assurdo modo di fare, ma i matematici; famose sono le grida negative addirittura di premi Fields.

E fu il matematico francese Guy Brousseau che, ribellandosi a tanta follia, riuscì a studiare tutto ciò da un punto di vista scientifico, mostrandone le efferatezze e la negatività, sancendo con ciò la nascita di quella disciplina che oggi si chiama Didattica della Matematica.

In molti paesi del mondo le cose si trascinarono più a lungo, in altri l'ondata non giunse nemmeno. In questi ultimi paesi i cambiamenti si fecero per altri motivi, legati per esempio a prestiti richiesti all'IDA (International Development Association), l'organo della Banca Mondiale che concede sì tali prestiti ma chiede drastici cambi innovativi nel programma di insegnamento nelle scuole, soprattutto delle materie scientifiche e tecniche (*in primis* della Matematica). L'idea è quella di potersi garantire la restituzione del prestito di lì a 20 anni, grazie al miglioramento culturale del paese, grazie al rinnovamento dei suoi programmi di studio. Un'idea geniale, vincente, una vera garanzia.

E così, per verificare che davvero un Paese che richiedeva un prestito stesse proponendo un programma innovativo che potesse garantire un reale rinnovamento positivo di quella nazione, il Banco mandava in missione esperti a controllare che quel che si stava proponendo fosse coerente e promettente. Di solito venivamo mandati come esperti persone con alle spalle ricerche sul funzionamento della scuola, programmi, *curricola*, cioè per lo più dirigenti scolastici con larga esperienza e pedagogisti.

Ma a uno degli autori di questo articolo capitò all'inizio degli anni '90 di essere inviato come esperto da parte di una banca internazionale in un paese cosiddetto in via di sviluppo che aveva promesso drastici cambi curricolari in Matematica (che era poi la disciplina nella quale più di ogni altra la banca chiedeva cambi, miglioramenti e ammodernamenti, essendo la disciplina trainante dei settori più scientifici, tecnologici e finanziari).

E così un matematico capì perfettamente, leggendo i programmi proposti dal giovane ministro dell'istruzione, ispirato e suggestionato da chissà chi, che l'aver posto: monoidi, gruppi, domini d'integrità, anelli, campi vettoriali, algebra di Boole … nella scuola primaria era solo un modo maldestro di tentare di far credere alla banca di aver dato seguito alle richieste.

Se invece di un matematico fosse stato inviato un esperto di tecniche scolastiche o di lavori di gruppo, quei termini usati sarebbero stati interpretati per buoni, come di fatto in certi paesi è accaduto, come moderni contenuti di Matematica per un paese che si vuole sviluppare tecnicamente in fretta …

Non è mettendo nomi altisonanti di temi matematici di alto livello che si cambia una scuola nazionale, un curriculum; ma solo un esperto disciplinare è in grado di rendersene conto.

Ringraziamenti
Gli autori ringraziano gli anonimi referee per le opportune osservazioni criticamente costruttive fatte alla precedente versione del testo di questo articolo. Esse sono state assai utili per una revisione che ha portato all'attuale versione.

Riferimenti bibliografici

Ackermann-Valladolao, E., Audétat, J., Giddey, C., Lock, N., Piguet-Chevalley, D., Reith, E., & Saada-Robert, M. (1983). Formation et actualisation des modèles du sujet en situation de résolution de problème. *Archives de psychologie*, *51*, 61–70.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1998). Epistemological and didactical obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Proceedings of the I Cerme of Osnabrük*, agosto 1998.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B(5), 465–494. [In lingua spagnola: Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5–24]. [In lingua inglese: Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "I see it but I don't believe it …". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *36*(1), 93–120].

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, *16*(1), 4–57.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2), 5–20.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico: Storia, epistemologica e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora.

Azhari, N. (1998). *Using the intuitive rule "Same of A, same of B" in conservation tasks*. Unpublished manuscript, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.

Bagni, G. T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale ed attuale: Una sfida per la scuola secondaria superiore. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 42, 9–20.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2006). *Leonardo e la matematica*. Firenze: Giunti. Nuova edizione 2019. [In lingua spagnola: Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2007). *Leonardo y la Matemática*. Bogotá: Magisterio]. [In lingua portoghese: Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2012). *Leonardo e a Matemática*. São Paolo (Brasil): Livraria da Física].

Becerra Galindo, H. M. (2020a). *Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente* (Tesis de doctorado). DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Educación matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Becerra Galindo, H. M. (2020b). La conciencia semiótica de los docentes de matemática en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. *Paradigma*, *41*(2). http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/issue/view/73

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques: Théorie des ensembles*. Paris: Hermann.

Bunge, M. (1985). *Pseudociencia y ideología*. Madrid: Alianza.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. París: Hermann.

Chini Artusi, L. (Ed.). (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI.

Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. London: Oxford University Press. [Varie edizioni in lingua italiana: Torino: Bollati Boringhieri].

D’Amore, B. (1991). logica Logica LOGICA la didattica della logica fra gli 8 ed i 15 anni. In B. D’Amore (Ed.), *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni* (pp. 79–90). Bologna-Roma: Apeiron.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Prefazioni di Colette Laborde e di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Primo Premio Assoluto “Lo Stilo d’Oro”, sezione Didattica, X Edizione del Premio Nazionale di Pedagogia Pescara]. [Il libro è stato recensito da Hermann Masier (2001), *ZDM*, *33*(4), 103–108]. [Edizione in lingua spagnola: D’Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prólogos de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luis Rico Romero. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Edizione in lingua portoghese: D’Amore, B. (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. Prefácios de Ubiratan D’Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau. São Paulo: Livraria da Física].

D’Amore, B. (2001a). *Scritti di epistemologia matematica: 1980–2001*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2001b). Considerazioni attorno alla logica di Gergonne. In B. D’Amore (Ed.), *Scritti di epistemologia matematica: 1980–2001* (pp. 17–54). Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2005). Secondary school students’ mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26–32.

D’Amore, B. (2007). Voci per il dizionario: F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto.* Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72–75), Formazione in scienze naturali (pp. 140–142), Formazione in matematica (pp. 145–147), Scienza (pp. 335–337). [Edizione in lingua tedesca: (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Fachdidaktik (pp. 98–101), Mathematische Bildung (pp. 227–228), Naturwissenschaftliche (pp. 255–258), Wissenschaft (pp. 362–364)].

D’Amore, B. (2021). *La matematica come strumento critico: Riflessioni su didattica, storia, letteratura, arte, magia e religioni*. Pitagora: Bologna.

D’Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M. I., Piatti, A., Rojas Garzón, P. J., Rodríguez Bejarano, J., Romero Cruz, J. H., & Sbaragli, S. (2004). Il “senso dell’infinito”. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 46–83. [Versione ampliata in lingua spagnola: D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M. I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P. J., Romero Cruz, J. H., & Sbaragli, S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*, *22*(2), 65, 187–216]. [Versione in lingua inglese: Sbaragli, S., Arrigo, G., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Frapolli, A., Frigerio, D., & Villa, O. (2011). Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers' beliefs on the conceptual education of students. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(1–2), 61–102].

D'Amore, B., & Duval, R. (2019). L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa: Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l'impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell'arte? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47–67.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 27–50.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 165–190. [In lingua spagnola: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*, *10*(1), 39–68].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, *21*(1), 87–92. Atti del Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 6 luglio 2006.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). La didattica della didattica della matematica: Esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(4), 325–353. [In lingua spagnola: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In B. D'Amore, & L. Radford (2017), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello (pp. 41–66). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento in matematica: Il punto di vista della didattica*. Prefazioni di Andrea Canevaro e George Santi. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 139–163.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia*. Vol. I. *Dalle origini al miracolo greco*. Prefazione di Umberto Bottazzini. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia*. Vol. III. *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Prefazione di Luigi Pepe. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. Vol. IV. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.

Dieudonné, J. (1987). *Pour l’honneur de l’esprit humain*. Paris: Hachette.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l’analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 295–342.

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*, *32*(62), 51–58.

Fandiño Pinilla, M. I. (2021). *Le frazioni: Matematica, storia e didattica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I., & D’Amore, B. (2009). *Área y perímetro: Aspectos conceptuales y didácticos*. Prefacio de Carlos Vasco Uribe. Bogotá: Magisterio. [In lingua italiana: Fandiño Pinilla, M. I., & D’Amore, B. (2019). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni: Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Pitagora].

Fischbein, E. (1963). *Conceptele figurale: Cercetari teoretice si experimentale asupra naturii entitatilor geometrice si a evolutiei lor în ontogeneza*. Bucuresti: Editura Academici Republicii Populare Romine. [Traduzione in lingua inglese: Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162].

Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 122–132). Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (B. D’Amore, Ed.). Bologna: Pitagora.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali.* Leida (Paesi Bassi): Ludovico Elzeviro. [Edizione 1964: Torino: Einaudi].

Gallo, E. (1985). Geometria, percezione, linguaggio. *L’Educazione matematica*, *6*(1), 61–104.

Gallo, E. (1992a). Elaboration of models for problem resolution in interaction with 14-15-year-old pupils. In L. Bazzini & H.-G. Steiner (Eds.), *Proceedings of the Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics* (pp. 289–301). Osnabrueck.

Gallo, E. (1992b). Le contrôle dans la résolution de problèmes: Une situation de classe. *Proceedings CIEAEM 44*, Chicago.

Gallo, E., Amoretti, C., & Testa, C. (1989). Sul ruolo dei modelli nella risoluzione di problemi di geometria: controllo ascendente e discendente. *Quaderni di ricerche in didattica della matematica*, 7. Torino: Università di Torino.

Gallo, E., Ferrari., M., & Speranza, F. (Eds.). (1995). *La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi*. Quaderni CNR, n. 15. Pavia: CNR.

Gallo, E., Giacardi, L., & Roero, C. S. (Eds.). (1996). *Conferenze e seminari 1995–1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche “T. Viola”, Torino.

Gallo, E., & Testa, C. (1991), Modèles, stratégies, types de contrôle dans la résolution d’un problème graphique de géometrie: *Cahiers de didactique des mathématiques*, 8, 55–78.

Gallo, E., Testa, C., & Amoretti, C. (1989). Utilisation de modèles géometriques en situation de résolution de problèmes: contrôle descendant et ascendant. *Actes de*

la 41e CIEAEM, Bruxelles.
Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican revolution*. Cambridge (Mass): Harvard University Press. [Trad. it.: Torino, Einaudi, 1972].
Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.). (1960). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Harvard University Press. [Trad. it. 1976. Milano: Feltrinelli].
Noether, E., & Cavaillès. J. (Eds.). (1937). *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. París: Hermann.
Popper, K. (1934). *Logik der Forschung*. Vienna: J. Springer.
Romberg, T. A. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceedings of the 2nd TME Conference, Bielefeld* (pp. 97–112). Bielefeld Antwerpen: IDM Publications.
Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.
Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Students' solution strategies in spatial rotation tasks

Strategie di soluzione degli studenti in attività di rotazione spaziale

Haralambos P. Kokkalellis,[1] **Athanasios Gagatsis,**[2]
Eleni Deliyianni[3] **and Iliada Elia**[2]
[1]*Department of Mathematics, University of Athens, Greece*
[2]*Department of Education, University of Cyprus, Cyprus*
[3]*Cyprus Ministry of Education, Culture, Sports and Youth, Cyprus*

Abstract. *This study focuses on the solution strategies of 6 Greek secondary students, one from each different grade of secondary education, in 5 mental rotation tasks from which emerges as a usual strategy, a visual-analytical approach within the harmonic type of reasoning, where the visual component came first and the analytical followed. In two-dimensional tasks, the students mainly followed a visual strategy, which is often accompanied by the use of gestures and body movements, in contrast to the three-dimensional tasks, where the need appears for visualization to be combined with a verbal description of transformations of the shape, in a mental rotation. At the same time, through problem solving, both a correlation of human memory with visualization and the development of creative approaches by students are highlighted; one of them was not able to distinguish that the front and back view of an object are not the same but reversed. Thus, through all the approaches, the need for students' action either for interpretation or for construction becomes clear.*

Keywords: mental rotation, harmonic type of reasoning, spatial processing ability, required action.

Sunto. *La presente ricerca si focalizza sulle strategie risolutive di sei studenti greci di scuola secondaria, uno per ciascun livello del percorso d'istruzione secondaria, in riferimento a cinque compiti che richiedono di immaginare la rotazione di un oggetto e dai quali emerge come strategia usuale un approccio visuale-analitico nell'ambito del ragionamento armonico, in cui la componente visuale precede quella analitica. Nei compiti bidimensionali gli studenti hanno seguito principalmente una strategia di visualizzazione, che spesso è stata accompagnata dall'uso di gesti e di movimenti del corpo, a differenza di quanto avvenuto nei compiti tridimensionali, dove sembra manifestarsi la necessità che la visualizzazione sia accompagnata da una descrizione orale di trasformazioni della forma, risultanti da una rotazione immaginaria. Nello stesso tempo, attraverso la risoluzione dei problemi, viene messa in evidenza una correlazione tra la memoria umana e la visualizzazione e lo sviluppo di approcci creativi da parte degli studenti; uno di loro non è stato in grado di riconoscere che la vista dal di fronte e di dietro non sono uguali, ma rovesciate l'una rispetto all'altra.*

Così, trasversalmente a tutti gli approcci, diventa chiara la necessità della messa in atto da parte degli studenti di azioni finalizzate all'interpretazione o alla costruzione.

Parole chiave: rotazione mentale, ragionamento di tipo armonico, capacità di processamento spaziale, azione richiesta.

Resumen. *Este estudio se centra en las estrategias de solución dadas por cada uno de los 6 estudiantes de secundaria griegos (uno por cada grado de escolaridad) que intervinieron en la prueba, en 5 tareas de rotación mental de las cuales surgen, como estrategia habitual, un enfoque visual-analítico dentro del tipo armónico de razonamiento, en el cual la componente visual llega en primer lugar seguida de la componente visual. En las tareas bidimensionales, los estudiantes siguieron principalmente una estrategia visual, que a menudo va acompañada del uso de gestos y movimientos corporales, en contraste con las tareas tridimensionales, donde aparece la necesidad de que la visualización se combine con una descripción verbal de las transformaciones de la forma, en una rotación mental. Al mismo tiempo, a través de la resolución de problemas, se destaca tanto una correlación de la memoria humana con la visualización como el desarrollo de enfoques creativos por parte de los estudiantes; uno de ellos no fue capaz de distinguir que las vistas frontal y trasera de un objeto no son las mismas, pero invertidas. Por lo tanto, a través de todos los enfoques, la necesidad de la acción de los estudiantes, ya sea para la interpretación o para la construcción, se hace evidente.*

Palabras claves: rotación mental, tipo armónico de razonamiento, habilidad de procesamiento espacial, acción requerida.

1. Introduction

Applying transformations and using visualization and spatial reasoning are two of the principal standards for geometry in the standards for school mathematics (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Spatial ability is defined by Lohman (1996) as the ability of the individual to produce, maintain, recall, and transform well-structured visual images. Moreover, it is defined by McGee (1979) as the ability to form mental images and manipulate them in the individual's thinking. In addition to them, Guay and McDaniel (1977) defined as low-level spatial ability, the ability to visualize – but not mentally transform – two-dimensional objects, and as high-level spatial ability, the ability to visualize three-dimensional shapes, and to mentally manipulate them. In addition, Gorgorió (1998) proposes the use of the construct "spatial processing ability" instead of the construct "visual processing ability", to denote not only the individual's ability to imagine spatial objects, their relationships, and transformations, but also their ability to decode these data visually as well as the ability to encode them in verbal or mixed ways. Linn and Petersen (1985) identified three factors that define the ability to perceive spatial concepts. One of them was "mental rotation" which was defined as the ability to quickly mentally rotate two-dimensional and three-dimensional shapes. In addition, mental rotation involves the mental processing of an image or object by observing how it will look from a different point of view when rotated rather than reflected (Michaelides, 2006). This study seeks to investigate what are the characteristics of students' solving strategies when engaging in mental rotation tasks, to analyze the functionality and effectiveness of these strategies as a function of task characteristics and to note any difficulties that arise.

2. Theoretical perspectives

Much of the research in the field of spatial ability is quantitative and based on factor analysis, on equation structural modelling and other statistical methods (Gagatsis & Kalogirou, 2013; Kalogirou, Elia, & Gagatsis, 2009; Kalogirou & Gagatsis, 2011, 2012). This research provides classifications that do not support the hypothesis that all individuals solve all tasks in a test in the same way (Lohman, 1979). Thurstone (1938) notes that there is evidence that individuals use different strategies to solve spatial problems. This view has led to many studies, where individuals have been asked to indicate what strategies they used to solve such problems (Lohman, 1979; Lohman & Kyllonen, 1983). In a study of gifted students, Kruktetskii (1976) proposed a classification of student solving strategies and distinguished three types of students, based on how they interpret the world mathematically and their preferences for problem solving. The research showed that a small percentage of students followed an analytical-productive and verbal-logical procedure (analytic type) or a visual-pictorial procedure (geometric type). In contrast, the majority of students used both abstract and pictorial representations (harmonic type) depending on the context of the problem (Michaelides, 2006). Thus, the conclusion that mental images and verbal processes not only do not function independently but interact as they have supportive functions (Fischbein, 1993; Lean & Clements, 1981; Lohman, 1979; Paivio, 1971) and this result has led to the argument that spatial ability is not identified exclusively with the processing of virtual information. This argument was reinforced by Gorgorió (1998) through the use of visualization, in the study of strategies for solving mental rotation tasks. Gorgorió (1998) proposed a distinction between visual solution strategies, where one can deduce from the student's observations and explanation that visual images had been used as an essential part of the solution, and non-visual or analytic strategies, where such images are not used, but an argument is developed to justify the solution strategy. In a visual strategy (holistic approach), verbal features are not specific or detailed enough and are often accompanied by gestures of students and body movements in an attempt to describe a mental movement such as rotation. Moreover, other research has noted the importance and role of the body and in particular perceptual-motor activities in learning mathematics (Lakoff & Núñez, 2000; Nemirovsky et al., 1998).

Elia, Gagatsis, and van den Heuvel-Panhuizen (2014) studied the role of gestures in making connections between space and shape aspects and their verbal representations in the early years. The same researchers studied the development of understanding of shapes and space with a focus on visualization (Elia, van den Heuvel-Panhuizen, & Gagatsis, 2018).

In fact, the use of gestures often reveals strategies that are difficult to articulate (Garber, Alibali, & Goldin-Meadow, 1998; Goldin-Meadow, Alibali, & Church, 1993). On the contrary, in an analytic strategy (partial approach), their attention is focused on parts or properties of the representations such as left-right part, relative position, etc., in an attempt to formulate an argument.

Among the characteristics considered to be able to modify or influence students' strategies, Gorgorió (1998) introduced the term "required action" to describe the most important characteristic, that is, the action required by the individual, as defined by Leinhardt et al (1990), to solve the problem. Thus, according to the authors, this required action can be one of interpretation or of construction. In the first case, the student must obtain information from an object or representation and such an interpretation work is considered when the student asked to react to the view of an integrated geometric action, as in the case of matching an element with someone representing the application of a geometric transformation into it, like mental rotation, in the context of multiple-choice questions. Instead, in the second case, the student acts to create a new object, constructing or representing it. That is, given the initial element, the student must create the final, performing the required geometric action himself, either mentally or tactilely (Gorgorió, 1998). As Gorgorió (1998) points out, the relationship between the two actions is such that interpretation work does not require construction while construction is often based on some kind of interpretation.

3. Method

3.1. Participants

This study was addressed to 6 Greek secondary students, one from each grade. The age of the participants ranged from 12-17 years.

3.2. Instruments: Questionnaire and interview

The study is completed in 2 phases. Initially, students are asked to answer a 5-task questionnaire (Appendix A), which aims to investigate the solution strategies that students apply to two- and three-dimensional tasks. The first two of them concern two-dimensional objects and the other three concern three-dimensional objects, which mainly concern cubic constructions. For the first four questions, students have to answer in multiple choice questions, through a number of images that are image variations provided by standardized tests (Eliot & Smith, 1983; Michaelides, 2006). In these first four questions, students are asked to isolate a representation that is the same or different from the original shape. The last task requires a problem solving, where the student is asked to explain the strategy used, which is the most personal ability to process virtual information (Bishop, 1983). In the second stage, the students were invited to short interviews (Appendix B), where they were asked to explain what prompted them to follow these solutions. The discussions took place online, on a communication platform, were videotaped and any notes made by the students were recorded. The wording of the questions was simple so as not to influence the students. The students' answers described in each episode are accompanied by a 1×4 vector of the form (Si, Ti, S or F, V or A or VA) stating that the student Si worked on the task Ti with success (S) or failure (F) having a visual (V) or analytic (A) or visual-analytic (VA) approach. Also, the code Si corresponds to the student of the i grade of secondary education.

4. Results

During the analysis of data, it was observed that none of the participants followed a unique type of strategy – either visual or analytical – for all five tasks. The constant alternation of strategies in different tasks or even their combination in the same task was the usual strategy of students, mainly for the three-dimension tasks (Table 1).

Table 1
Students' strategy in each task

Description of task			**Strategy**		
Task	Type	Dimension	Visual	Analytic	Visual-Analytic
1	*Multiple Choice*	2	5	0	1
2	*Multiple Choice*	2	5	0	1
3	*Multiple Choice*	3	0	3	3
4	*Multiple Choice*	3	0	4	2
5	*Problem solving*	3	0	0	6

Indeed, these tasks were more difficult for the students and in particular the fifth task (the rotated dice). For the two-dimensional tasks, a visual strategy was mainly applied which soon led all the students to correct answers. On the contrary, in the three-dimensional tasks, analytic strategies were observed to a small extent, focusing on specific characteristics of the shapes and to a greater extent, combined strategies of the two above, mainly in the problem solving but also in the third and fourth task. It is worth noting that only the second-grade student (S2) was able to answer all the questions correctly, justifying his point of view.

4.1. Features of visual strategies

The visual strategies followed by the students are generally characterized by a lack of verbal description of the features of the shape, while 5 of the students used a gesture either by moving their hand or even their whole body by bending, in their attempt to watch and identify the transformations of the shape with some of the given options they had.

In fact, one of them (S2) instead of being limited to the circular movement of the hand, wanted to explain his point of view by pretending with his hands, each arrow in the first image (Figure 1) justifying that one hand can never be on the other side, as in the last photo of Figure 1.

Figure 1. Use of gestures for representation of arrow movements.

In addition, another student (S1) formed a circle with both hands and wanted to rotate it (fig. 2), essentially emphasizing that a continuous check was made to identify the rotating initial shape with the given options.

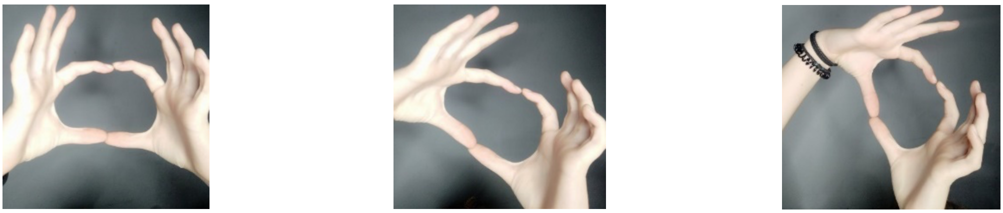


Figure 2. Use of gestures for representation of circular movement.

The excerpt from the justification for S2 is indicative:

R: Why is C?
S2: If we turn the circle, rotate it, everything will come out the same as above

except for C.
R: In fact… (I remain silent for a while) that is, it can never take position C?
S2: Look to put it more simply. Look at my two hands. The left is the black arrow and the right is the red. If I move them in a circle, I can never have C because I would have to have my hands otherwise…
(S2, T1, S, V)

Of particular interest is the justification of the correct answer to the first task by the student S3, who used her hand to first show the position of the original shape and then showed her hand in a position of reflection to the original position (Figure 3), saying that "It's as if we have reversed it and that my hand can never come to this position as it was originally".

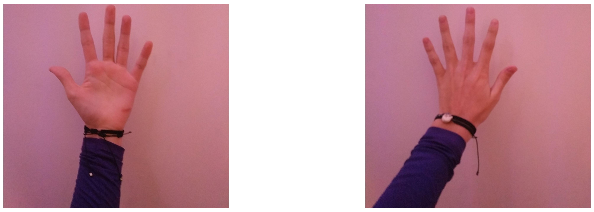


Figure 3. Use of gestures to show reflection

In addition, during the solving of the second task, the older student S6 used the phrase "axis of rotation" while giving an interesting parallel with the design of a circle without geometric instruments but with the use of a clip, showing to apply a continuous circular motion, which in a snapshot it is identified with figure B. Indicatively mentioned:

R: Why B?
S6: I saw the original, I saw its axis of rotation, that is, basically if we could press it in the middle and turn it…
R: Where in the middle?
S6: There at the end of the straight section, in the line that it has and if we turn it then it gives us the B. This is like the way I make a circle without diabetes, holding one end in one clip and putting a pencil in the other.
(S6, T2, S, V)

Another major feature of the visual strategies observed in two students is the dominance of intuition due to their observation.

R: What do you think?
S1: It is B. I saw it directly.
R: So, you just saw this or did you check the rest?
S1: Now that I see the rest… it's all upside down, so that's what I said at the beginning.
(S1, T2, S, V)

4.2. Features of analytic strategies

The analytic strategies were applied to some of the three-dimensional tasks. In these tasks the students examined specific parts and features of the shapes, expressing a sequential way of thinking, based mainly on well-formulated reasoning based on logical arguments and comparisons of parts of the shapes rather than holistic manipulation of the shape visually. These justifications were mainly expressed either through the numbering of the cubes in a row or a column or even in the whole cubic construction but also in the observation of the position of some subsections of the figure.

> S5: I counted all the cubes on the original shape and it is 18…. Then I saw the ones below and they are all 17 except B which is 18
> **(S5, T3, S, A)**

Finally, it is worth noting that one of the students had difficulty distinguishing that the front and back view of the shape are not the same but reversed.

> S4: You see from here, yes (he thinks) … that is, it can be the same… uh .. it will be the same! Yes since it does not want something, then it will be like C? Yes, the C!
> R: C?
> S4: The back view is the same as the front view, it will not change because if it changed, we would see it in the original shape. Basically, my object remains the same. I did it with my hands, I put my two hands and I see it with my thumb up and I saw that if they were opposite, they would not join so I would see something else.
> **(S4, T4, F, A)**

4.3. Features of combination of visual and analytic strategies

The combined strategy of the visual and the analytic approach at the same time was applied mainly in the three-dimensional schemes and in the problem solving but also in two solutions of two-dimensional tasks.

> R: You tell me B. Why?
> S5: If you pay attention to the right angle that is formed and try to rotate it, the shape C can never appear.
> Now if we look at D, then it is the same as C and A is also like that. So, it's B.
> **(S5, T2, S, VA)**

It is remarkable that in almost all cases where both a visual and an analytic strategy were followed at the same time, with the visual always preceding the analytic one, the students correctly solved the task, given to them. In fact, the student S6, during the execution of task 3, initially stated that all five shapes are the same, approaching the solution visually, as he confirmed in his interview and then recalled his answer focusing on individual parts of the shape, approaching the solution, but again without success, showing that he did not combine the two approaches.

S6: They are all the same!
R: For example, if I ask you about any of these, can you tell me what you did?
S6: I took the original shape and, in my mind, I tried to turn it so that it is the same as A for example and I did it in all the shapes to see which one is the same.
R: In fact, is it the same?
S6: Yes, as the rest.
R: Ok, so you are telling me that all 5 shapes are the same.
S6: Aa! Just a minute! Now I noticed this! Let's say C, from the top the second step below has one step while the one above (original) has two. So, it is a different shape and the same goes for A. So, I conclude that it is B and D.
R: Do you think that B and D are the same as the original shape?
S6: Yes, I counted the steps and they have the same number of cubes.
(S6, T3, F, A)

In addition to the above excerpt, student S1 referred exactly that firstly rotate the shape B so that it has the position as the original shape and secondly counted the cubes on top of the shape, where this part of the shape seems like a ladder. So, S1 follow firstly a visual approach that it is combined later with an analytic one.

R: It's B, you tell me. Why should this be?
S1: Well, if we return the shape (meaning B) to its normal form (meaning the position of the original shape)…
R: When you say return what do you mean?
S1: Rotate it, how do I say it?
R: Let's rotate it, in fact… and?
S1: ... I counted the cubes on top that look like a ladder and saw that most of the cubes are at the beginning and the rest A, C and D…
R: Beginning? What is the beginning?
S1: The beginning is from left to right and because it has more cubes to the left I say that it is B.
(S1, T3, S, VA)

Another remarkable approach was made by the student S3 during the solution of task 3, where after first making a mental rotation as he confirmed in his interview, he assigned a number to each column of the cubic structure and emphasized the arrangement of numbers, seeing construction as a mapping.

R: Why not someone other than B? As A, for example?
S3: I counted in the normal shape (original), the cubes in each row vertically (meaning column). The original shape goes 1 cube, 2, 2, 3, 3, 4, 3, 2 while in A if I bring it otherwise it goes 1, 2, 2, 3, 4, 3, 2.
R: And you did that for everything?
S3: Yes, I turned the shapes, brought them in a straight line (position of the original shape) and measured in each row. Only B fits.
(S3, T3, S, VA)

Of particular interest is the approach of solving the fifth task (problem) by the student S4, who seemed to confuse the front and back view of a shape earlier.

S4 creatively tried to reconstruct the die from the beginning, something that was not clear at first, but he claimed in his post-task interview, based on the two images he provided. Student S6 tried something similar, starting with the faces of the first die. In these cases, the task resolution time was extremely shorter compared to other student approaches.

> R: I would also like to ask you: Did you do something different from what you told me in the description? Did something I do not know help you?
> S4: Yes, the truth is that I tried to see how the die are.
> R: In what way?
> S4: I started with an empty cube and based on what I saw from the pictures, I started to place the numbers in the right places, it is as if I had the cube in front of me and turned it where I wanted. After I put the opposite sides 1-6 and 3-4 I was left with 2-5, so I had the die as an image and as soon as I turned it, I first raised the 4 and then the 1 on the right, so I got the 5 ahead. Like I have a Rubik's cube.
> **(S4, T5, S, VA)**

In a similar way of solution, student S6 suggested a reconstruction of die with the exception that the view of first die helps you to begin the process of placement of the suitable indications of it. In addition to this, S6 confirms at the end of his point that he founded all the faces of first die.

> S6: I first saw the two dice that have both rolled 2. The first one has 1 and 3 while the other one has 6 and 4, so we have actually rolled 2 in a different direction, so if we turn it clockwise twice in order for 3 and 1 to leave, then based on the positions of 6 and 4, 6 must be opposite 1 and 4 opposite 3, so I have really found all the positions (faces) on the first die.
> R: Yes, yes, go on…
> S6: ...so now, tilt it to the right (axis of rotation: pair opposite sides 1 and 6), it will take out 4, but in front it will be 1 and 2, so to go where 1 is in the last shape, you have to turn it clockwise (axis of rotation: pair opposite sides 4 and 3) and the bottom which is the number 5 to the left of 1 will go where the side we are looking for is.
> **(S6, T5, S, VA)**

It is worth noting that problem 5 initially caused confusion about finding the requested face, revealing an inability of students to memorize both faces and die transformations. Over time though logical arguments were made about the opposite faces and the perception of the constant presence of 2 on the upper face of the two-given dice. However, three of the students approached the solution stating with certainty that the requested face is 2 or 5 without however being able to justify which of the two. In fact, two of them and two other students initially claimed that it should be 5, without justification because it does not appear in the faces of the given two dice, possibly revealing an influence of the teaching contract in the students' thinking.

> S5: As I can see, only 5 is missing from the numbers. This must be…
> R: Does that matter?

> S5: Now that I noticed it, it has sat a little behind my head and it affects me a little. But I will try to see it again.
> **(S5, T5, F, VA)**

Finally, it is necessary to mention as a first approach for solving task 4, a real movement, where a student noted that it is like walking behind the shape and observing its characteristics. As a second approach, student S5 told that he turns the shape 180 degrees and look at the unique cube above and the missing cube at the right part of shape. In his interview, he told that these two approaches applied almost simultaneously but in the end of our conversation, he reported that eventually the first approach preceded.

> S5: I try to imagine the shape as if I were going behind it
> R: Wait, what do you mean?
> S5: Without making a turn, if we thought that this is a three-dimensional object, then it is like standing in front of it and walking to go behind it. Then, I look the position of cube above and how the right part (i.e, the missing cube down) is seemed from the back view.
> **(S5, T4, S, VA)**

5. Conclusions

Students' visual approach and the difficulty of formulating verbal arguments to describe the rotation of a two-dimensional shape, often lead to the use of gestures or body movements to state and justify their argument. On the contrary, in three-dimensional tasks, they have the option to refer to individual characteristics of the shapes and in fact often to combine them with mental rotations following the harmonic type of reasoning as it is defined by Kruktetskii (1976). In fact, the visual strategy seems to precede the students' reasoning and the analytic one to follow. It is worth noting that all students followed a combination of strategies in at least one specific task successfully. If this clue is combined with the fact of problem solving by only three students, where all followed the visual-analytic approach and in fact two of them the creative-constructive solving of task, in a very short time, then we conclude that this combination seems be a strong success predictor of solving a task.

However, the observed inability to hold the transformations of an image subject to mental rotation highlights the correlation of the memory factor with visualization, as Bishop (1983) has pointed out.

At the same time, an important element that emerged from the study is the confusion and difficulty of perception – as previous research points out (Michaelides, 2006) – for some students that the front and back view of a shape are the same and not reversed. However, this element was accompanied in this study by the element of creativity, which is an indication that this misconception may sometimes not be an obstacle to constructive and creative approaches from the beginning. In any case, the role of required action (Gorgorió, 1998) either for interpretation or for construction is important, with construction often requiring interpretation while interpretation not always construction.

Another domain of relative research investigates the geometrical figure apprehension. Geometrical figure apprehension is important for the analysis of a geometrical problem (Duval, 1995). According to Duval (1999), there are four types of cognitive apprehension of a geometrical figure: perceptual, sequential, discursive, and operative. The above theoretical approach of Duval gave rise to dozens of experimental research studies that led to the scientific foundation of the theory (e.g. Gagatsis, Monoyiou, Deliyianni, Elia, Michael, Kalogirou, Panaoura, & Philippou, 2010; Gagatsis, 2011, 2012, 2015; Gagatsis, Michael-Chrysanthou, Deliyianni, Panaoura, & Papagiannis, 2015). These studies, that concern students in primary and secondary and statistical methods like factor analysis and equation structural modeling yield similar results independently of the school level of the students (Michael, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Philippou, 2009; Michael, Gagatsis, Avgerinos, & Kuzniak, 2012; Michael-Chrysanthou, Gagatsis, 2013, 2015). Moreover, in some studies, the geometrical figure apprehension is related to some dimensions of spatial ability (Kalogirou, Elia, & Gagatsis, 2009; Kalogirou & Gagatsis, 2010; 2011). All the above studies on the geometrical figure apprehension and spatial ability concern two-dimensional tasks. The need to move a step forward and expand the above-mentioned studies in three-dimensional tasks arises.

Our article analyses some of the aspects related to the topic of visualization in Mathematics Education, giving a detailed "local" characterization of the study, in reference to some of our research in the field. Of course, the topic "visualization" is extremely vast, and it would be hard to take it completely into account. It would be interesting to frame it also in a broader sense, for instance also in reference to positions that underline that the visual techniques often rely on "not always procedurally 'safe' routines" (Arcavi, 2003). On the other hand, Duval (2005), underlining of the importance for visualization, goes beyond the four types of cognitive apprehension of a geometrical figure and considers the relationship between the dimensions of the representation support (2D) and the objects represented on it (2D or 3D). We believe that it would be important to mention these approaches because our present work is related to them.

Finally, of particular interest in future research is expected to be the focus on the correlation of solution strategies mainly in three-dimensional tasks with the development of students' creativity in terms of flexibility, fluency, and novelty (Torrance, 1974; Silver, 1997; Leikin, 2011). This correlation can reveal the need of differentiated teaching practices, which can encourage the development of spatial reasoning of students. In this direction, differentiation of curriculum so as to include tasks that encourage both visualization and argumentation may help to achieve this goal.

References

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215–241.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp.175–203). New York, NY: Academic Press Inc.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142–157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–26). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Elia, I., Gagatsis, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). The role of gestures in making connections between space and shape aspects and their verbal representations in the early years: Findings from a case study. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 735–761.

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Gagatsis, A. (2018). Geometry learning in the early years: Developing understanding of shapes and space with a focus on visualization. In V. Kinnear, M. Y. Lai, & T. Muir (Eds.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning, Early Mathematics Learning and Development* (pp. 73–94). Singapore: Springer.

Eliot, J., & Smith, I. M. (1983). *An international directory of spatial tests.* Windsor Berkshire: NFER-Nelson.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Gagatsis, A. (2011). How can we evaluate the apprehension of a geometrical figure? In S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment* (pp. 97–100). Bologna: Pitagora.

Gagatsis, A. (2012). The structure of primary and secondary school students' geometrical figure apprehension. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications* (pp. 11–20). Rhodes: University of the Aegean.

Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la Matemática - Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 231–248). Chia: Universidad de la Sabana.

Gagatsis, A., & Kalogirou, P. (2013). *Development of spatial ability and geometric figure apprehension* [in Greek]. Nicosia: University of Cyprus.

Gagatsis, A., Michael-Chrysanthou, P., Deliyianni, E., Panaoura, A., & Papagiannis, C. (2015). An insight to students' geometrical figure apprehension through the context of the fundamental educational thought. *Communication & Cognition*, *48*(3–4), 89–128.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., & Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 10*, 35–50.

Garber, P., Alibali, M. W., & Goldin-Meadow, S. (1998). Knowledge conveyed in gesture is not tied to the hands. *Child Development*, *69*(1), 75–84.

Goldin-Meadow, S., Alibali, M. W., & Church, R. B. (1993). Transitions in concept acquisition: Using the hand to read the mind. *Psychological Review*, *100*(2), 279–297.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, *35*(3), 207–231.

Guay, R. B., & McDaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 211–215.

Gurny, H. G. (2003). *High school students' performance on Vandenberg's mental rotations test: Art ability, gender, activities, academic performance, strategies, and ease of taking the test* (Master's thesis). Retrieved from: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED479372.pdf

Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2011). A first insight of the relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, *11*, 27–39.

Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2012). The relationship between students' spatial ability and geometrical figure apprehension. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 11* (1–2), 133–146.

Kalogirou, P., Elia, I., & Gagatsis A. (2009). Spatial ability and geometrical figure understanding. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, & L. Vivier (Eds.), *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (pp. 105–118). Lefkosia: University of Cyprus.

Kruktetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Lean, G., Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 267–299.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1–64.

Linn, M., & Petersen, A. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, *56*(6), 1479–1498.

Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: Individual differences in speed and level* (Technical Report No. 9). Stanford, CA: Aptitudes Research Project, School of Education, Stanford University.

Lohman, D. F. (1996). Spatial ability and g. In I. Dennis & P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: Their nature and measurement* (pp. 97–116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates

Lohman, D. F., & Kyllonen, P. C. (1983). Individual differences in solution strategy on spatial tasks. In R. F. Dillon & R. R. Schmeck (Eds.), *Individual differences in cognition* (Vol. 1, pp. 105–135). New York, NY: Academic Press.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin, 86*(5)*,* 889–918.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in task solving: An obstacle or a heuristic tool? *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 13*, 17–30.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2015). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime, 17*(4–I), 165–180.

Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E., & Kuzniak, A. (2011). Middle and high school students' operative apprehension of geometrical figures. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics*, *11*, 47–57.

Michael, P., Gagatsis, A., Avgerinos, E., & Kuzniak, A. (2012). Approaching the operative apprehension of a geometrical figure. In E. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications* (pp. 69–84). Rhodes: University of the Aegean.

Michael, P., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou A., & Philippou, A. (2009). The functioning of geometrical figures in Cypriot geometry textbooks. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E., Deliyianni, & L. Vivier (Eds.), *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (pp. 91–104). Nicosia: University of Cyprus.

Michaelides, M. P. (2006). An investigation of students' solution strategies in spatial rotation tasks. *Themes in Education*, *7*(1), 43–62.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction*, *16*(2), 119–172.

Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. Chicago, lL: University of Chicago Press.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance test of creative thinking: Norms-technical manual: Verbal test, forms A and B: Figural tests, forms A and B.* Princeton, NJ: Personal Press.

APPENDIX A

Questionnaire

Task 1
The following figure shows a signal from the traffic code:

ONLY 3 of the following shapes are rotations of the original shape. Find what is NOT!

A B Γ Δ

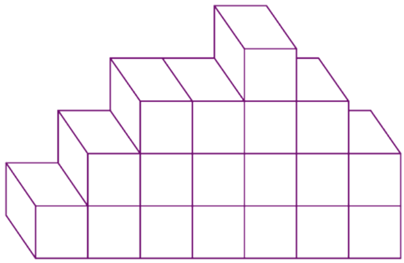
Task 2
The following figure shows the letter G of the English alphabet:

ONLY one of the following is the same as the original shape, but we have just rotated it. Find it!

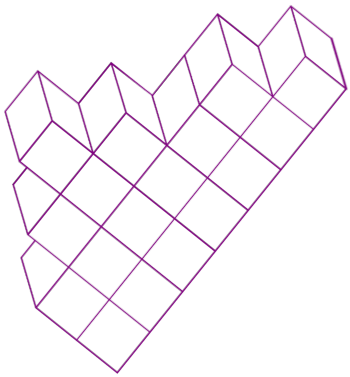
A B Γ Δ

Task 3

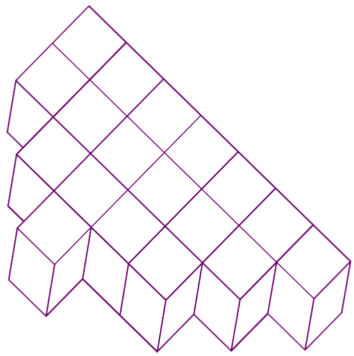
The following shape is given:



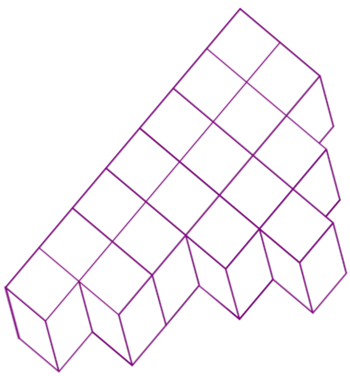
Which of the following shapes is exactly the same as the above shape?



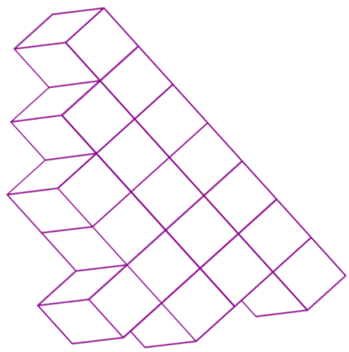
A



B

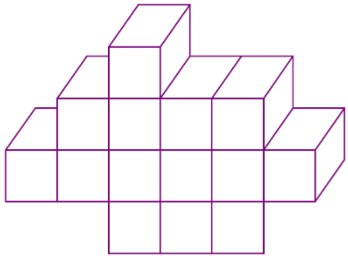


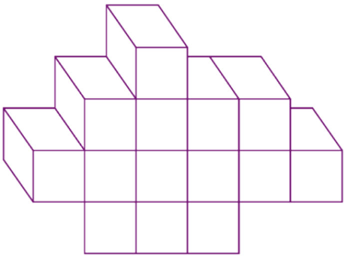
Γ



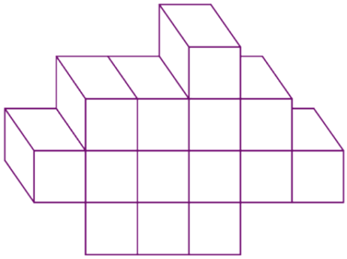
Δ

Task 4
How would the shape seem if we could see it from the back view?

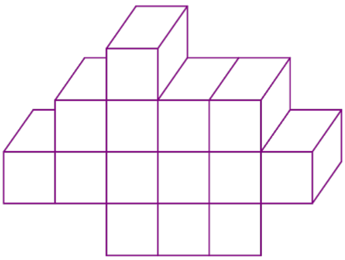




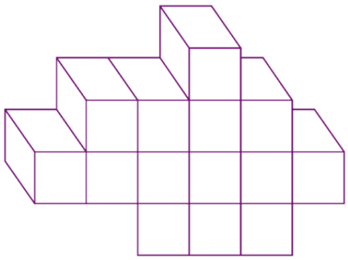
A



B



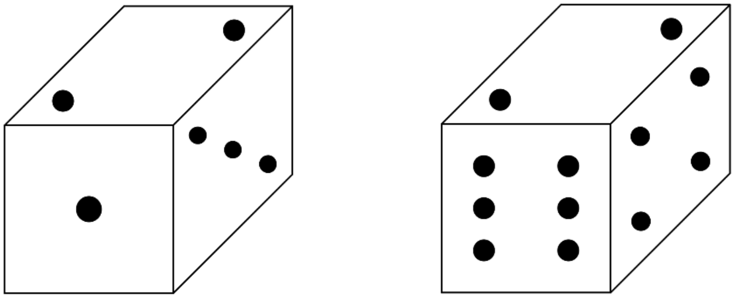
Γ



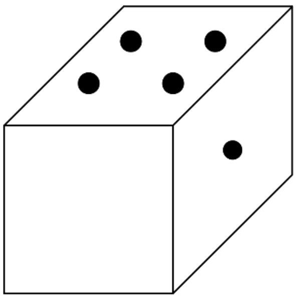
Δ

Task 5

In the figure below you can see the SAME die that have been rolled twice and different faces of it can be seen.



Can you notice the missing face of the die?



Important note

The selection of the above five tasks was based on the analysis protocol of Dr. M. P. Michaelides, Department of Psychology, University of Cyprus. This questionnaire was the result of the master's thesis of Dr. Michaelides at the University of Cambridge under the supervision of Kenneth Ruthven. In this study, the questionnaire was built following that author's protocol with some modifications.

APPENDIX B

Interview questions

Write your answer to the following questions in one letter:

1. Use of Mental Rotation

A. I rotated the whole figure in my mind when making the comparison.
B. I rotated a section of the figure in my mind when making the comparison.
C. I am not sure how I did it.
D. Other.

2. Visual or Analytic strategy or combination of them

A. I thought through the steps verbally in my mind (i.e., "I count the cubes in the second row/column").
B. I relied mainly on visualizing the figures and did not talk myself through the steps.
C. I did both of them.
D. Other.

3. Use of gestures and body movements

A. I used movements of my finger, hand (my body, in general) and/or pencil to help me with the task.
B. I did not use movements of my finger, hand (my body, in general) and/or pencil to help me with the task.

Question	**Task 1**	**Task 2**	**Task 3**	**Task 4**	**Task 5**
1					
2					
3					

RECENSIONI

Martha Isabel Fandiño Pinilla (2021). *Le frazioni: Matematica, storia e didattica*. Prefazioni di Athanasios Gagatsis, Carlos E. Vasco Uribe e Bruno D’Amore. Bologna: Pitagora.

Recensione di Massimo Ferri

Quando ho detto a un mio amico, non matematico ma intelligente, che stavo leggendo un libro sulle frazioni, le sue folte sopracciglia si sono alzate in modo eloquente. La domanda inespressa era: “Un intero libro sulle frazioni? C’è tanto da dire?”. Bene, se avete lo stesso dubbio vi consiglio di buttare subito un’occhiata al capitolo 5, dove Martha Fandiño Pinilla smonta ed esamina metodicamente ogni possibile concezione intuitiva di frazione: se vi sembrava che fosse un concetto tanto semplice e che fossero scemi i vostri allievi con i loro errori, adesso avete perso qualche ingannevole certezza.

Ora che siete corsi alla cassa e vi siete accaparrati questo gioiellino, potete ripartire dall’inizio. Le tre prefazioni vi confortano sul vostro acquisto, poi l’Autrice saggiamente pone le basi strettamente matematiche per la costruzione degli insiemi numerici pertinenti. Martha predispone un percorso semplificato per chi non ha una laurea in Matematica; sono convinto, però, che anche lettrici e lettori prudenti torneranno sui passi saltati in prima lettura: sono scritti in modo assai chiaro e dicono molto senza farlo pesare. Trovo opportuna la scelta di assegnare ai razionali non negativi il ruolo di protagonisti. Lo sfuggente concetto di “parti uguali” in cui dividere una altrettanto sfuggente unità viene attentamente considerato qui e per tutta l’opera. I cenni letterari e le osservazioni sulla notazione usata in altri paesi dànno un respiro piacevole a questo capitolo formale.

Il secondo capitolo è un’approfondita (32 pagine!) analisi storica del concetto di frazione, ben contestualizzato e ad ampio raggio geografico; è un capitolo interessante per chi legge, ma lo sarà anche, a cascata, per gli allievi: il contesto storico, la faticosa evoluzione di un concetto lo rendono umano, affrontabile.

Terzo e quarto capitolo sono dedicati alle frazioni in ambito didattico e alle ricerche pertinenti; qui l’Autrice si preoccupa di chi non ha dimestichezza con la didattica come disciplina scientifica: ogni termine tecnico è segnalato con un asterisco, confortandoci se non ne abbiamo un immediato riscontro intuitivo e rimandandoci ai testi opportuni o al Capitolo 7. Per me (didatta sì, ma ruspante) sono i capitoli più ostici, però ci sono tutti i riferimenti bibliografici che possano soddisfare curiosità e necessità di maggiore comprensione.

Ho già accennato al quinto capitolo “Vari modi di intendere il concetto di ‘frazione’”, che trovo sorprendente e magnifico: Martha elenca 12 punti di vista comuni e due più tecnici. Qui nasce anche una prima analisi degli errori frequenti, trattati come preziose fonti d’informazione invece che storture mentali o frutto di pigra indifferenza.

Il Capitolo 6 chiarisce il significato di noetica e semiotica. Se avevo una certa idea del secondo termine, il primo mi era estraneo; e questo è paradossale, visto che ho dedicato decenni della mia vita proprio alla noetica, cioè all'apprendimento di concetti da parte mia e soprattutto dei miei studenti. L'Autrice ci mette davanti a una realtà scomoda: gli oggetti della matematica non esistono nella realtà; si possono appoggiare anche ampiamente a situazioni reali, ma sono eminentemente astratti. Al di là di motivazioni ed esempi concreti, giunti al dunque dobbiamo presentare ai discenti dei simboli e loro manipolazioni che speriamo convoglino un concetto. L'acquisizione di quelle rappresentazioni semiotiche garantisce il passaggio alla noetica, l'acquisizione del concetto o costituisce solo una elaborata illusione per noi e per loro? Le frazioni si prestano a fornire degli esempi lampanti di questo problema. Nota personale: qui finalmente mi è risultato chiaro cosa sono i "registri semiotici".

Nel settimo capitolo arriviamo al cuore del problema: gli errori; convergono qui le considerazioni e le analisi dei capitoli precedenti. Prima vengono esaminate le caratteristiche oggettive degli errori frequenti, ma poi si passa dall'osservazione alla costruzione di modelli, alla ricerca di spiegazioni. Si chiama metodo scientifico. Finalmente ho capito in cosa consiste il malefico "contratto didattico", cosa sono i "modelli parassiti". Come dopo tutte le spiegazioni azzeccate, viene da dire: è logico, naturale, come mai non ci ho pensato prima? Risposta: occorreva che ci pensassero scientificamente degli esperti. Un utile ultimo capitolo tira le somme e azzarda, con prudenza e modestia, qualche suggerimento.

Ho imparato molto da questo libro. Dovrebbero leggerlo quelle "menti eccelse" che nei corridoi ridacchiano delle risposte assurde e contraddittorie dei loro allievi; non si accorgono, poveretti, che i malcapitati studenti hanno offerto loro delle strabilianti finestre su quei concetti che gli eccelsi credono di conoscere così bene. Martha Fandiño Pinilla ha confezionato uno studio accurato in ogni dettaglio, basato su un'ampia esperienza sul campo (sua e di altri), con 12 fitte pagine di bibliografia, con spunti di approfondimento matematico, psicologico, pedagogico. Va bene, è quello che ci si aspetta da un professionista! Ma c'è una qualità che va al di là delle aspettative, una qualità sempre più importante e sempre più rara: il rispetto.

Martha mostra un enorme rispetto per tutti: per il lettore in generale, per gli studenti soprattutto quando sbagliano, per la faticosa conquista, nei secoli, della conoscenza; importantissimo: per gli errori degli stessi docenti! Ha rispetto per il maestro che può avere difficoltà con strutture, passaggi a quoziente ecc.; ha rispetto per chi insegna (magari da decenni, come me!) ma non si era mai curato di imparare a farlo scientificamente. Ha rispetto per il bambino che non conteggia l'area di quello stretto pezzo di prato, perché la mucca di cui parla l'esercizio non ci può passare; anzi, ritiene questa un'osservazione fruttifera per il rapporto fra modello concreto e astrazione.

Questo bellissimo passo è, per me, quello che meglio rappresenta il rispettoso rapporto dell'Autrice con la matematica e con noi. Grazie, Martha!

Bruno D'Amore (2020). *La matematica nell'opera di Dante Alighieri: Spunti biografici a scopo didattico*. Prefazioni di Umberto Bottazzini ed Emilio Pasquini. Bologna: Pitagora.

Recensione di Mario Castellana

È da tenere presente che tra le diverse iniziative per celebrare i settecento anni della morte di Dante una certa attenzione da un po' di tempo si sta dando alla sua visione della scienza, tematica quasi del tutto assente nella critica letteraria di impronta crociana; ma per capirne meglio il ruolo che ha avuto nel percorso dantesco occorre prendere in considerazione il fatto che il tema dei rapporti fra arte e matematica, soprattutto, è diventato strategico nel corso del Novecento, già a partire con l'arte astratta inspiegabile se non si tiene presente la visione del mondo introdotta dalle geometrie non euclidee e dalla teoria degli insiemi di Cantor che, ben metabolizzate a livello artistico, hanno permesso di rinnovare *ab imis* linguaggi e stili. In seguito, nella seconda metà del secolo, la geometria dei frattali e poi la matematica delle tassellature, prima con Roger Penrose e ultimamente con Robert Fathaver nel suo importante lavoro del 2020 *Tessellations: Mathematics, Art and Recreation*, hanno riproposto con forza il tema dell'unità della cultura, il superamento del dilemma delle due culture, quella umanistica e quella scientifica, artificiosa divisione che solo in Italia, pur essendo stata la culla dell'Umanesimo e del Rinascimento dove scienza e arte erano strettamente connesse, ha raggiunto livelli a dir poco nefasti con conseguenze culturali e istituzionali ancora presenti e non facilmente superabili.

Non è un caso che il matematico Godfrey H. Hardy (1877–1947), sulla scia di Leonardo, abbia parlato di 'estetica matematica' col scrivere che "il matematico, come il pittore o il poeta, è un creatore di forme" e di simmetrie analoghe a quelle create in campo poetico e artistico, come anche lo stesso scrittore francese Paul Valéry aveva evidenziato nel suo continuo abbeverarsi alle stesse fonti, quelle di Leonardo e della matematica del suo tempo; se le forme in campo artistico si servono di parole, schizzi, pezzi e suoni, in campo matematico danno origine a idee ma tutte trovano nelle rugosità del reale e nell'esperienza del mondo il loro continuo nutrimento che poi costituiscono il *plafond* dell'unità della cultura che nessun sano pensiero filosofico può disconoscere. Alla luce di tali acquisizioni che hanno trovato una giusta collocazione anche in alcuni settori non marginali della stessa critica letteraria, non è un caso che, già nel 1995, uscì uno dei primi significativi lavori orientati in tal senso su *Dante e la scienza*, a cura di P. Boyle e V. Russo, dove i vari contributi erano indirizzati a cogliere il ruolo e la funzione del mondo della scienza del suo tempo sino a parlare di ‘epistemologia di Dante’, se per epistemologia si vuole però intendere l’immagine della scienza in generale e così come essa si presentava nel variegato universo medievale. Dopo l’importante evento internazionale tenutosi nel 2015 a Friburgo con la pubblicazione dei relativi atti su *Dante e la critica letteraria: Una riflessione epistemologica* (a cura di T. Kleinkeit e A. Malzacher), è da tenere presente il più recente Focus dell’Ufficio Stampa del CNR, *Almanacco della Scienza: 1321-2021 Dante 700* (n. 22, dicembre 2020), dove diversi studiosi e scienziati si sono confrontati col mondo di Dante e la sua visione religiosa, politica e scientifica con illustrare finalità e modi di intendere la scienza cosmologica del suo tempo.

Questi studi nel loro complesso chiariscono meglio e ancora una volta che l’interesse di Dante per la scienza era funzionale alla sua concezione poetico-religiosa finalizzata a dare risalto alla divinità come fonte della creazione dove l’uomo “dee traere a le divine cose quanto può”; nello stesso tempo sottolineano il fatto che il poeta fiorentino era ben documentato sui dibattiti filosofico-scientifici del suo tempo sino a farsi quasi loro portavoce e a interrogarli nelle diverse pieghe col fare del pensiero aristotelico e della visione tolemaica del mondo una vera propria *Weltanschauung* chiaramente in senso poetico alla pari di quella di impronta teoretica presente nella *Summa Theologiae* dell’Aquinate.

In tale contesto viene a inserirsi, ma con una particolare attenzione verso le conoscenze matematiche possedute da Dante e con un approccio diverso, il recente lavoro del matematico e storico delle matematiche Bruno D’Amore, *La matematica nell’opera di Dante* (con prefazioni di Umberto Bottazzini ed Emilio Pasquini, Bologna, Pitagora Ed. 2020); già in diversi studi sulla *Divina Commedia*, come quello apparso nel volume del 1995 e di altri successivi, D’Amore ha spiegato la profonda simmetria di origine matematica che ne regge l’intero impianto dalle strutture geometriche dell’*Inferno* al complesso intreccio delle sfere, l’una dentro l’altra, del *Paradiso*. Tutto questo lungo e non comune percorso di continuo e contemporaneo abbeveramento alle fonti della matematica e dell’arte lo ha portato ultimamente a scrivere *Arte e Matematica* del 2015, lavoro dove si analizzano le metafore, le analogie e le identità ‘tra i due mondi’.

Impegnato per diverso tempo anche nel difficile ambito della didattica delle matematiche che gli ha permesso di sviscerarne meglio sul terreno storico-epistemologico le complesse concettualizzazioni che le hanno caratterizzate, D’Amore ci offre un lucido esempio di concreto superamento delle due culture nel senso che in quest’ultimo testo innanzitutto, per capire l’universo poetico ed esistenziale di Dante, si fa suo ‘contemporaneo’, come ha fatto Hélène Metzger negli anni ’20 di questo secolo nei confronti di alcuni scienziati come Newton e Lavoisier, per entrare nel vivo delle questioni e dello spirito del tempo che visti alle luce del presente possono sembrare stravaganti e tipiche di un mondo prescientifico; ma soprattutto si fa narratore, quasi fedele compagno di viaggio di Dante e di Guido Cavalcanti nelle diverse città da Siena a Ravenna, li segue nelle taverne e negli accesi dibattiti avuti, nelle 'dispute aperte' in campo filosofico, nei diversi incontri con personaggi e figure come ad esempio Lauretta che gli ha permesso di avere delle preziose idee per affrontare il grosso problema della quadratura del cerchio quando stava per portare a termine la terza cantica. Seguono con uno stile non letterario le due appendici finali che affrontano la presenza dei matematici contemporanei di Dante da Paolo dell'Abaco e Pietro Ispano, le cui opere erano ben conosciute come quella sull'ottica che avranno un ruolo non secondario nella visione della luce nel *Paradiso,* a Guido Bonatto, Michele Scotto e Roberto Grossatesta e quella degli antichi da Pitagora, Euclide e Isidoro di Siviglia, e tematiche attinenti l'aritmetica e la probabilità, la logica formale e la geometria, l'incontro a volte non sulla stessa linea con le idee di Aristotele.

D'Amore, pertanto, ci offre uno spaccato poetico-scientifico non comune del mondo di Dante e nel farsi narratore dei suoi interessi e aspirazioni ne sviscera le diverse articolazioni, operazione che permette una particolare esegesi di alcuni passi della *Commedia* in quanto lo scopo del lavoro, pur con uno stile letterario, è quello di chiarire i problemi scientifici legati al testo dalla "magia della scrittura posizionale dei numeri" grazie all'incontro con le lezioni di Paolo dell'Abbaco a quella delle leggi dell'ottica di Ispano, dalla logica modale studiata da ragazzo a quella dell'infinità dei numeri oggetto di 'dispute aperte' a Firenze dai "giovani aspiranti filosofi" nelle loro continue sfide davanti alle chiese; non a caso le pagine dedicate alla questione dell'infinito, croce e delizia secolari di poeti e matematici, sono quelle più pregnanti anche perché tale tema è stato affrontato nel *Convivio* dove si afferma che "'l numero quant'è in sé considerato, è infinito, e questo non potremo mai intendere". D'Amore, nel sottolineare che solo a fine Ottocento G. Cantor ci regalò l'infinito attuale e la capacità di renderlo più abbordabile "all'occhio dell'intelletto", si sofferma sul ruolo nella *Commedia* degli "angeli, tanti ma tanti angeli, angeli non infiniti ma certo di numero superiore a qualsiasi estro umano"; così pure ci aiuta a capire meglio il senso del dialogo con Lauretta e la soluzione poetica che Dante apporta al problema della stessa quadratura del cerchio nel XXXIII canto del *Paradiso* con l'espressione "Qual è il geomètra che tutto s'affige, per misurar lo cerchio, e non lo trova, pensando, quel principio ond'elli…".

Così i diversi episodi che hanno come oggetto 'angoli', 'triangoli', 'piramide', 'la taverna', 'gli asini che volano', 'la tabellina', 'Pitagora e l'armonia' prendono in esame con piglio narrativo i dubbi, le difficoltà e le capacità di Dante di metabolizzare in senso poetico questioni secolari oggetto di discussione da parte dei matematici occidentali e anche il suo modo di capire e di riconoscere i contributi apportati da altri popoli come “le figure degli Indi” e il modo con cui gli ‘infedeli’, gli arabi, siano arrivati a scrivere i numeri; questo ricco ventaglio di conoscenze del mondo delle matematiche e la capacità di farle dialogare in maniera armonica da una parte colle dinamiche del mondo poetico e dall’altra con le verità della fede da parte di Dante offre l’occasione a D’Amore di mettere in atto a sua volta un gioco della finzione non comune col raggiungere, come dice Umberto Bottazzini nella prefazione, un “felice equilibrio tra realtà storica e immaginazione”. In tal modo si rende il poeta fiorentino un fine interprete di quell’anima cosmopolitica di cui era portatore un certo Medioevo, dove culture diverse pur scontrandosi contribuivano a potenziare il patrimonio conoscitivo dell’umanità.

Questo modo particolare di ricordare Dante, di viverlo e soprattutto di attraversarlo da parte di Bruno D’Amore ce lo fa sentire più nostro, ce lo rende compagno di viaggio, un navigatore che ci avverte che le stesse acque della conoscenza non sono lineari ma frutto del continuo scontrarsi con le onde del reale, dove i problemi scientifici sono veri e propri problemi umani con tutto il loro corredo esistenziale e non avulsi dalla vita quotidiana; in tal modo le stesse inquietudini e titubanze di Dante di fronte ai misteri della vita le sentiamo nostre e la *Divina Commedia,* come ogni espressione artistica e scientifica, può essere vista come un continuo e sofferto prendere atto delle nostre miserie e fragilità, dei nostri limiti e nello stesso tempo della necessità di fare tentativi per uscirne pur sapendo razionalmente il più delle volte di rimanere sconfitti. Bruno D’Amore nell’entrare in comunione con Dante e le sue traversie, cioè le nostre, ci offre pertanto un percorso poetico-scientifico e insieme ermeneutico dove ragioni della vita e ragioni dell’arte-scienza non sono scisse, ma si incontrano coll’arricchirsi reciprocamente di ulteriori significati anche per l’uomo del XXI secolo, assetato soprattutto di testimonianze di vita coerente tra pensiero e azione come indicava Simone Weil, figura quest’ultima che potrebbe essere il novello Virgilio per chi voglia avventurarsi nei meandri dell’esistenza e costruire quella che chiamava ‘architettura dell’anima’.

La matematica e la sua didattica, Anno 29, n. 1, 2021

ISSN 1120-9968